АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3182—3553

*

№ 5 1954

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Ефимов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. И. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 4
Алгебра 11
Многочлены и линейная алгебра 11
Группы 13
Поля, кольца и структуры 17
Топология 19
Теория функций действительного переменного 23
Приближение функций полиномами и их обобщениями 25
Теория функций комплексного переменного 27
Дифференциальные уравнения 35
Обыкновенные дифференциальные уравнения 35
Уравнения в частных производных . . . 38
Интегральные уравнения 45
Вариационное исчисление 46
Анализ (другие вопросы) 47
Числовые ряды 49
Специальные функции 49
Интегральные преобразования и операционное исчисление 52
Функциональный анализ 53
Теория вероятностей 55
Математическая статистика 60
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 64
Геометрия 66
Проективная и начертательная геометрия 67
Алгебраическая геометрия 67
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 68
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 70
Метрические методы в геометрии 72
Геометрия выпуклых многообразий . . . 73
Численные и графические методы 74
Таблицы . . . . . —
Алгебра электрических цепей 79
Вычислительные машины и математические приборы 81
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 94
История математики. Биографии 95
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 3182—3553 **№ 5** **Май 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3182. **III Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике.** Рвачева (III Всесоюзна нарада по теорії імовірностей та математичній статистиці. Рвачова К. Л.), Вісник АН УРСР, 1953, № 11, 65—67 (укр.)

Краткая заметка обзорного характера о происходившем с 28 сентября по 2 октября 1953 г. в Киеве III Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике. *А. А. Бобров*

3183. **Заключительное заседание. Заключительное слово Тибора Ерден-Груз, ученого секретаря Венгерской Академии наук** (A záróülés. Erdey-Grúz Tibor, a Magyar tudományos akadémia főtitkárának zárszavá), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 275—279 (венг.)

Сообщение о заключительном заседании торжественного собрания, посвященного 150-летию со дня рождения Яноша Бояи.

3184. **Знакомство с научно-исследовательской работой профессора Чэнь Цзянь-гун в области математики.** Чэн Минь-дэ (介紹陳建功教授的數學研究工作。程民德), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 11, 78—79 (кит.)

3185. **Использовать опыт советских ученых при изучении математического анализа.** Чэнь Цзянь-гун (對學習蘇聯展開數學分析研究的意見。陳建功), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 11, 74—77 (кит.)

3186. **Учиться у профессора Чэнь Цзянь-гун.** Су Бу-цин (向陳建功教授學習。蘇步青), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 11, 80 (кит.)

3187. **Государственные премии в области науки.** (Państwowe nagrody naukowe), Matematyka, 1953, **6**, № 5, 32 (польск.)

Премии за 1953 г. по секции физико-математических наук получили Марчевский (Edward Marczewski), Лея (Franciszek Leja) и Микусинский (Jan Mikusiński).

3188. **Список членов Французского математического общества на 30-е июня 1953 г.**— (Liste des membres au 30 juin 1953. Société mathématique de France), Bull. Soc math. France, 1953, **81**, № 4, I—XIV (франц.)

3189. **Аксиома** (Acsioma. Din Bolşaia Sovetscaia Enţiclopediia, vol. 1, pp. 613—616), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1953, **6**, № 4, 109—116 (рум.)

Перевод статьи из Большой советской энциклопедии, изд. 2-е, т. 1, 613—616.

3190. **Связь между науками и ее значение.** Буліган (L'acte de liaison et sa portée. Bouligand Georges), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 5—6, 129—135 (франц.)

На ряде примеров, начиная с декартовой аналитической геометрии, связавшей геометрию с алгеброй, иллюстрируется плодотворное влияние связи между различными науками и отраслями одной и той же науки.

Примечание референта. Не все примеры автора представляются одинаково убедительными. В частности, вызывают возражения философские концепции статьи о роли математики в физике и других науках. *В. И. Левин*

3191. **Мартовское собрание секции Южной Калифорнии (Математическая ассоциация Америки)** (The March meeting of the Southern California Section (The Mathematical Association of America), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 508—510 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 33-му собранию секции Южной Калифорнии 14 марта 1953 г.

3192. **Ноябрьское собрание в Лафайетте** (The November meeting in Lafayette.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 65—74 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 486-му собранию Американского математического общества 28—29 ноября 1952 г., в числе которых следующие:

Алгебра и теория чисел

1. О простых идеалах кольца целых функций. Хенриксен (Henriksen Melvin).

2. Аддитивные многочлены. Уэйлс (Whaples George).

Анализ

3. Обобщенная асимптотическая плотность. Бак (Buck R. C.).

4. О предельных точках комплексных последовательностей. Бак (Buck R. C.).

5. О геометрическом доказательстве равенства $V(S) = L(S)$ для непрерывных, параметрически заданных, поверхностей. Чезари (Cesari Lamberto). Здесь $L(S)$ и $V(S)$ — соответственно площадь Лебега и Гёце поверхности S.

6. Вырожденные (degenerate) решения квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Чжэнь (Chen Y. W.).

7. О разложении по собственным функциям, связанном с парой обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Конте, Сангрен (Conte S. D., Sangren W. C.).

Рассматриваются решения уравнений

$$u'(x) - [\lambda + a(x)]\, v(x) = 0,$$
$$v'(x) + [\lambda + b(x)]\, u(x) = 0,$$

удовлетворяющие условиям:

$$u(0)\cos\alpha + v(0)\sin\alpha = 0, \qquad \int_0^\infty (|u|^2 + |v|^2)\, dx < \infty.$$

Устанавливается наличие непрерывного спектра.

8. Структура L-конусов и геометрическая характеристика L-пространств. Фуллертон (Fullerton R. E.).

9. Теоретико-функциональный метод нахождения собственных значений и собственных функций. Предварительное сообщение. Голомб (Golomb Michael).

10. Общая фредгольмова теория для линейных уравнений. Предварительное сообщение. Голомб (Golomb Michael).

11. Точные решения одного класса интегральных уравнений. Кемперман (Kemperman J. H. B.).

12. О производной однолистной функции. Лоуотер, Пиранян (Lohwater A. J., Piranian George). (РЖМат, 1954, 2563).

13. О бесконечно дифференцируемых функциях. Розентал (Rosenthal Arthur).

14. Принцип максимума модуля для некоторых систем дифференцируемых функций. Тайтус, Янг (Titus C. J., Young G. S.). Для $u_i = u_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,n$, класса C^1 при некоторых условиях относительно якобиана каждый $|u_i|$ достигает максимума на границе открытого множества. Используются методы предыдущей работы авторов (Michigan Math. J., 1952, **1**, 89—93).

Прикладная математика

15. Механическая квадратура вблизи особой точки. Лью к (Luke Y. L.).

Рассматривается

$$\int_0^{nh} x^{-1/2} f(x)\, dx.$$

Геометрия

16. О некоторых предельных точках, определяемых заданием метрики в порождающей (generic) точке кривой. Белл (Bell P. O.).

17. Инцидентные геометрии. Уайлер (Wyler Oswald).

Основания математики и математическая логика

18. Производящие множества. Деккер (Dekker J. C. E.).

19. Два замечания о рекурсивно перечислимых множествах. Деккер (Dekker J. C. E.) (РЖМат, 1954, 2492).

20. Производящие классы. Деккер (Dekker J. C. E.).

21. Обобщенные экстремальные точки. Хаммер (Hammer P. C.).

Топология

22. Гомеоморфные аппроксимации монотонных отображений некомпактных двумерных многообразий. Предварительное сообщение. Хоккинг (Hocking J. G.).

23. Характеристические свойства колец функций. Предварительное сообщение. Мак-Найт (McKnight J. D., Jr).

24. Расслаиваемые пространства. I. Предварительное сообщение. Мостерт (Mostert P. S.).

25. Гомологии и кольца непрерывных функций. Предварительное сообщение. Шанкс (Shanks M. E.).

Рассматривается вопрос о совпадении групп ∇-гомологий пространства X и его функционального кольца $C(X)$.

3193 К. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., изд. 3-е, переработ., 608 стр., Гостехиздат, М., 1953, 13 р. 90 к.

3194 К. Справочник по чистой математике. Кларк (A note book in pure mathematics. Clarke L. Harwood, 184 pp., 99 figs, Cambridge William Heinemann, Ltd., Melbourne, London, Toronto, 1953, 8 s. 6 d.), Trans. Inst. Marine Engrs, 1953, **65**, № 9, 7 (suppl.) (библ.)

3195 РЕЦ. Лекции по высшей математике. Том 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными. Вариационное исчисление. Функции одного комплексного переменного. Душек (Vorlesungen über höhere Mathematik. 3. Bd. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Duschek A., IX + + 512 S., 107 Ill., Springer-Verlag, Wien, 1953, 38. 80 DM) [**Рецензия: Бухольц** (Buchholz H.), Elektrotech. Z. Ausg. A, 1953, **74**, № 18, 551—552 (нем.)]

3196 РЕЦ. Введение в учение о функциях. Видок (Einführung in die Funktionslehre. Widok M., Bd. 6 der Schriftenreihe «Mathematik für Ingenieure», 105 S., ill., Braunschweig, Georg Westermann Verlag, 1953, 8.80 DM) [**Рецензия: Эрих** (Ehrich H.), Feinwerktechnik, 1953, **57**, № 10, 332 (нем.)]

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3197. Роль аксиомы индукции в элементарной арифметике. Рылл-Нардзевский (The role of the axiom of induction in elementary arithmetic. Ryll-Nardzewski C.), Fundam. math., 1952, **39**, 239—263 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор рассматривает так называемую элементарную арифметику. Это — система, логической базой для которой является узкое функциональное исчисление (с тождеством). Эта система имеет 9 констант, а именно знаки для неравенства, для числа 1, для суммы, произведения и степени, для x-го простого числа (или для простого числа с индексом x), для показателя простого числа с индексом x в разложении y на произведение простых чисел, для индекса наибольшего простого числа, являющегося делителем y и для функции $f(x)$, постоянно равной x. Эти константы охарактеризованы 28 аксиомами, выполняемыми при обычной арифметической интерпретации.

Дополняя элементарную арифметику конечным числом аксиом, выполняемых при обычной арифметической интерпретации, получаем системы Пеано. Расширенные системы Пеано имеют кроме 9 констант, фигурирующих в элементарной арифметике, конечное число новых констант для действий, позволяющих исключить из аксиом кванторы существования.

Главным результатом, полученным в работе, является теорема: не существует такой системы Пеано (обычной или расширенной), в которой можно доказать все случаи схемы индукции:

$$\Theta(1)\cdot(x)[\Theta(x)\supset\Theta(x+1)]\supset(x)\,\Theta(x).$$

Отсюда вытекает, в частности, что совокупность всех выражений элементарной арифметики, удовлетворяемых при обычной интерпретации констант, не является конечно аксиоматизируемой.

В доказательстве используется существование моделей для систем Пеано, которые не изоморфны совокупности натуральных чисел (Skolem Th., Fundam. math., 1934, **23**, 150—161). *A. Mostowsky*

3198. Теория кванторов и пустые области индивидуумов. Хейлперин (Quantification theory and empty individual-domains. Hailperin Theodore), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 3, 197—200 (англ.)

В классическом исчислении предикатов выводима формула $(x)F(x)\supset(\exists x)F(x)$, содержательно неверная для пустой области индивидуумов. Поэтому нельзя утверждать, что всякая выводимая формула исчисления предикатов истинна в любой области индивидуумов.

Мостовский (Mostowski A., J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 107—111) предложил способ построения исчисления предикатов, свободный от указанного неудобства, однако его метод связан с другими неудобствами, например отсутствием дистрибутивного закона $(x)(A.B)\equiv.(x)A.(x)B$ (точка означает конъюнкцию). Кроме того, схема заключения $\dfrac{P,\ P\supset Q}{Q}$ может нарушаться, если в формулах P, Q встречаются свободные переменные

Автор строит систему QE для исчисления предикатов, применимую к любой области индивидуумов, включая пустую, и свободную от отмеченных неудобств метода Мостовского. Основная мысль автора состоит в предложении интерпретировать $(x)p$ и $(\exists x)p$ в случае, когда x не входит в p или область индивидуумов пуста, не так, как p (что принято у Мостовского), а как конъюнкцию, соответственно дизъюнкцию, пустого множества членов, т. е. $(x)p$ интерпретировать в этом случае как истину, а $(\exists x)p$ — как ложь. Кроме того, автор не допускает вхождения свободных переменных в доказуемые формулы.

Система QE содержит пропозициональные константы t (истина) и f (ложь). Металогический знак $\vdash_0$ означает, что замыкание того, что следует, является теоремой системы QE.

Схема аксиом для QE такова:

QE0. Если φ — тавтология (т. е. получается подстановкой в тождественно-истинную формулу исчисления высказываний. *Прим. реф.*), то $\vdash_0\varphi$.

QE1. $\vdash_0(\alpha)(\beta)\,\varphi\supset(\beta)(\alpha)\,\varphi$.

QE2. $\vdash_0(\alpha)(\varphi\supset\psi)\supset.(\alpha)\,\varphi\supset(\alpha)\,\psi$.

QE3. Если α не входит свободно в φ, то

$$\vdash_0\varphi\supset(\alpha)\,\varphi.$$

QE4. Если φ' отличается от φ только наличием свободных вхождений α' там, где в φ свободно входит α, то

$$\vdash_0(\alpha)\,\varphi\supset(\alpha')\,\varphi'.$$

QE5. Если α не входит свободно в φ, то

$$\vdash_0\varphi\supset(\alpha)\,\psi.\supset(\alpha)(\varphi\supset\psi).$$

Кроме того, имеется правило вывода

MP. Если φ и $\varphi\supset\psi$ суть теоремы, то ψ — теорема.

Лемма 1. Если все свободные переменные формулы φ свободны в ψ и $\vdash_0\varphi$, и $\vdash_0\varphi\supset\psi$, то $\vdash_0\psi$.

Лемма 2. Если α не свободна в φ, то

$$\vdash_0\sim(\alpha)\,f\supset.\ (\alpha)\,\varphi\supset\varphi.$$

Теорема 1. Полная система аксиом для формул, истинных в любой непустой области, получается присоединением к QE аксиомы

QE6 $\sim(\alpha)\,f$.

Теорема 2. Система аксиом QE0-5 с MP полна для всех формул, истинных в любой области индивидуумов. *А. С. Есенин-Вольпин*

3199 К. Введение в математическое мышление. Стэйблер (An introduction to the mathematical thought. Stabler E. R., pp. XIX + + 268, Addisson-Wesley Publishing Inc., Cambridge, Mass., 1953, 4.50 doll.) (англ.)

Эта книга, предназначенная «обеспечить единообразный и состоятельный подход к логической структуре математики и развить соответствующую философскую точку зрения на математическое знание», сводит воедино элементарные понятия символической логики (стр. 1—122) и современной алгебры (стр. 123—228). Книга заканчивается

кратким обсуждением оснований математики (стр. 229—255) с точки зрения постулационистов (postulationists), логикалистов (logicalists), формалистов и интуиционистов. Можно сильно усомниться в значении такой «исследовательской» трактовки для читателей, математическая подготовка которых не идет дальше «планиметрии и элементарной алгебры в средней школе». Книгу с удовольствием прочтут студенты с более высокой математической подготовкой. Одно из косвенных значений вводного исследования такого характера состоит в том, что оно может возбудить у пытливых студентов вопросы, в частности, относящиеся к философским основам математики.

Дрезден (*A. Dresden*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 5, 441.

См. также: 3439, 3483

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3200. Асимптотическая формула для числа решений в целых положительных $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r$ неравенства $x_1^m y_1^n + \ldots + x_r^m y_r^n \leqslant N$. Ш и р ш о в В. М., Сб. науч. работ Белорусского политехн. ин-та, 1953, № 5, 240—242

Пусть $K_r(N)$ — число решений неравенства $x_1^m y_1^n + \ldots + x_r^m y_r^n \leqslant N$ в натуральных числах, $m > n$. Применяя метод индукции по параметру r, автор показывает, что

$$K_r(N) = \Gamma^r\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(1+\frac{r}{n}\right)\zeta^r\left(\frac{m}{n}\right)N^{r/n} + O\left(N^{r/n-1/n+1/m}\right).$$

Этот результат является почти очевидным обобщением известных фактов. *Н. Г. Чудаков*

3201. О теореме Лемера, относящейся к проблеме Тэрри — Эскотта. П а л а м а (On a theorem of D. H. Lehmer concerning the Tarry — Escott problem. P a l a m à G.), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 19—23 (англ.)

Дается новое доказательство следующей теоремы Лемера (Lehmer D. H., Scripta math., 1947, **13**, № 1—2, 37—41):

Пусть b, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — заданные целые, причем $b > 1$ и $\mu_i > 0$; пусть далее при $r = 0, 1, \ldots, b-1$

$$s_r^{(n)} = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n,$$

где a_i — целые, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leqslant a_i < b \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv r \pmod b,$$

и $\sigma_k(r)$ — сумма k-ых степеней $s_r^{(n)}$ по всем указанным значениям a_i. Тогда

$$\sigma_k(0) = \sigma_k(1) = \ldots = \sigma_k(b-1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Доказательство основывается на известной теореме о том, что из системы равенств

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

вытекает, при произвольном h, система равенств

$$\sum_{i=1}^{p}(a_i^k + (b_i + h)^k) = \sum_{i=1}^{p}(b_i^k + (a_i + h)^k)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

и на данном автором (Rend. mat. e delle sue appl., Roma, 1947, № 1—2, 96—120) обобщении этой теоремы. *К. К. Марджанишвили*

3202. О представлении целого числа в виде суммы трех четвертых степеней. П а р т х а с а р а т х и (On the representation of an integer as the sum of three fourth powers. P a r t h a s a r a t h y M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 523—527 (англ.)

Автор элементарно доказывает, что для бесконечного множества натуральных N

$$r_{3,4}(N) \geqslant \exp\left(c\frac{\log N}{\log\log N}\right),$$

где $r_{3,4}(N)$ — число представлений N в виде трех четвертых степеней натуральных чисел. Ранее совсем другим способом было установлено, что для бесконечного множества натуральных n

$$r_{3,4}(n) \geqslant c'\frac{\log n}{\log\log n}$$

(Chowla S., J. Indian Math. Soc., 1933, **20**, 120—128). *А. Г. Постников*

3203. Простое доказательство теоремы о том, что все большие целые числа являются суммами самое большее восьми кубов. У о т с о н (A simple proof that all large integers are sums of at most eight cubes. W a t s o n G. L.), Math. Caz., 1953, **37**, № 321, 209—211 (англ.)

Работа содержит новое доказательство теоремы о том, что $G(3) \leqslant 8$. Это доказательство элементарно и, в отличие от данного Э. Ландау, не опирается на теорему о распределении простых чисел в арифметической прогрессии. Прежде всего устанавливается, что всякое натуральное N представимо суммой 6 кубов неотрицательных целых чисел, если существует целое m, удовлетворяющее условиям:

$$(m, 6) = 1; \quad \frac{3}{4}m^3 < N < \frac{3}{2}m^3; \qquad (1)$$

$$N \equiv 3m \pmod{6m}.$$

При доказательстве этого утверждения используется теорема о том, что всякое целое k с условием $k \equiv 3 \pmod 8$ представимо суммой трех квадратов. Дальше показывается, что для достаточно большого целого n можно найти два целых неотрицательных числа x и y такие, что для $N = n - x^3 - y^3$ условиям (1) будет удовлетворять $m = 5^r$, где целое определяется неравенствами

$$5^{3r} \leqslant n < 5^{3r+3}.$$

Заметим, что обобщение (1) имеется в работе Ю. В. Линника и А. В. Малышева (Усп. мат. наук, 1953, 8, № 5(57), 3—71). *В. И. Нечаев*

3204. Представление чисел суммою k-ых степеней. Рао (Representation of numbers as sums of k-th powers. Rao K. Subba), Math. Student, 1953, **21**, № 1 — 2, 49 (англ.)

Доказывается, что при любом рациональном t для всякого натурального k бесконечно множество решений уравнения

$$t = a_1 x_1^k + \ldots + a_m x_m^k,$$

где $a_i = \pm 1$; $i = 1, \ldots, m$; $m = 2^{\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]}$, в рациональных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Доказательство элементарно и негромоздко. *В. И. Нечаев*

3205. Вычисление суммы Рамануджана и ее обобщений. Андерсон, Апостол (The evaluation of Ramanujan's sum and generalization. Anderson Douglas R., Apostol T. M.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 211—216 (англ.)

Рассматриваются функции $S(n; k)$, определенные формулой

$$S(n; k) = \sum_{d|(n,k)} f(d)\, h(k/d),$$

где $f(n)$ и $h(n)$ — мультипликативные арифметические функции (необязательно вполне мультипликативные). Примером является известная сумма Рамануджана

$$C_k(n) = \sum_{d|(n,k)} d\mu(k/d).$$

Устанавливается мультипликативное свойство функций $S(n; k)$: если $(n_1, n_2) = (k_1, k_2) = (n_1, k_2) = (n_2, k_1) = 1$, то $S(n_1 n_2; k_1 k_2) = S(n_1; k_1) \times S(n_2; k_2)$. При помощи этого свойства вычисляется сумма $S(n; k)$ в случае, когда $f(n)$ вполне мультипликативна, а $h(n) = g(n)\,\mu(n)$, где $g(n)$ мультипликативна (требуется еще, чтобы $f(p) \neq 0$, $f(p) \neq g(p)$ при всех простых p):

$$S(n; k) = g(n/(n, k))\,\mu(k/(n; k))\,[F(k)/F(k/(n, k))],$$

где

$$F(k) = \sum_{d|k} f(d)\, h(k/d).$$

Далее авторы замечают, что $S(n + k; k) = S(n; k)$ и разлагают $S(n; k)$ в конечный ряд Фурье, при этом получается, в частности, известная формула

$$C_k(n) = \sum_{\substack{m \bmod k \\ (m,k)=1}} \exp[2\pi i m n/k].$$

Наконец, даются формулы суммирования для рядов Дирихле вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n; k)}{n^s} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(n; k)}{k^s}.$$

А. Г. Постников

3206. Простые числа формы a^2+b^2 в арифметической прогрессии. Прахар (Über Zahlen der Form a^2+b^2 in einer arithmetischen Progression. Prachar Karl), Math. Nachr., 1953, **10**, № 1—2, 51—54 (нем.)

Приводится асимптотическая формула для функции $A(x, D, l)$, выражающей число чисел вида $a^2 + b^2$, которые не превосходят x и сравнимы с l по модулю D.

Асимптотическая формула для этой функции в случае, когда $D = 1$, была дана Ландау еще в 1908 г. Аналитическая структура доказательства Ландау сохраняется полностью при переходе к произвольной арифметической прогрессии, однако, разумеется, в асимптотике появляются дополнительные арифметические множители, зависящие от D и l, которые вычисляются без особых трудностей. *А. А. Бухштаб*

3207. О простых числах и совершенных числах. Тушар (On prime numbers and perfect numbers. Touchard Jacques), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 35—39 (англ.)

Ван-дер-Поль показал (van der Pol B., Koninkl. Nederl. Akad. wetensch., Proc., 1951, **A54**, 261—284), что функция

$$\alpha(t) = 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k e^{-kt},$$

где σ_k — сумма делителей натурального числа k, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2\frac{d^3\alpha}{dt^3} + 2\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} - 3\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0,$$

и вывел отсюда рекуррентную формулу

$$\frac{n^2(n-1)}{12}\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} [5k(n-k) - n^2]\,\sigma_k \sigma_{n-k}, \quad n > 1. \quad (1)$$

В работе показывается, как при помощи элементарных преобразований можно соотношению (1) придать бесконечно много других форм. Например,

$$n^2(n-1)\sigma_n - 18n^2 S_0 + 60 S_2 = 0, \quad (2)$$

$$n^3(n-1)\sigma_n - 48 n S_2 + 72 S_3 = 0, \quad (3)$$

где $S_p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p \sigma_k \sigma_{n-k}$.

Из формулы (2) легко выводится, что для того чтобы n было простым числом (т. е. $\sigma_n = n + 1$), необходимо, чтобы числа

$$\Delta = (18 S_0 + 1)^2 - 240 S_2$$

и

$$R_n = \frac{1}{2}(18 S_0 + 1 - \sqrt{\Delta})$$

были точными квадратами. Автор утверждает, что эти условия являются и достаточными. Однако из его рассуждений достаточность следует только в случае дополнительного предположения, что $R_n = n^2$.

Аналогично изучается случай, когда $\sigma_n = 2n$ (т. е. когда n — совершенное число), и устанавливается, что нечетные совершенные числа могут быть только вида $12m + 1$ или $36m + 9$. *А. А. Киселев*

3208. **Некоторые новые кратно-совершенные числа. Франки, Гарсия** (Some new multiply perfect numbers. Franqui Benito, Garcia Mariano), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 459—462 (англ.)

Кратно-совершенными называются числа, для которых $\varphi(n) = kn$, где $\varphi(n)$ — сумма делителей n, а k — некоторое натуральное число. (Для обыкновенных совершенных чисел $k = 2$.) Приводятся примеры кратно-совершенных чисел для различных k, а именно: 5 чисел для $k = 5$, 29 чисел для $k = 6$ и 29 чисел для $k = 7$. *В. Д. Подсыпанин*

3209. **Некоторые суммы, содержащие функции Бернулли. Карлиц** (Some sums containing Bernoulli functions. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 475—476 (англ.)

Пусть полиномы Бернулли $B_m(x)$ определяются соотношением

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_m(x) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1},$$

и пусть $\overline{B}_m(x)$ имеет период 1 и совпадает с $B_m(x)$ при $0 \leqslant x < 1$. Доказывается равенство

$$\sum_{s=1}^{h-1} \sum_{r=0}^{k-1} h^{r(1-m)} \overline{B}_m\left(h^r x + \frac{s}{h}\right) = h^{k(1-m)} \overline{B}_m(h^k x) - \overline{B}_m(x), \qquad (1)$$

и рассматриваются некоторые его частные случаи ($h = 2$) и следствия ($k \to \infty$ при $m > 1$). Указывается, как получить формулу, аналогичную (1), исходя из функций $\eta_m(x, \alpha)$, определяемых соотношением

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \eta_m(x, \alpha) = \frac{(1-\alpha)e^{xt}}{1 - \alpha e^t}$$

при $\alpha^{h-1} = 1$, $\alpha \neq 1$. *А. А. Киселев*

3210. **О числе целых точек в многомерных шарах. Луремаанашвили А. П.**, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, 1953, **19**, 79—120 (русск.; резюме груз.)

Дана новая оценка разности между числом целых точек в $2k$-мерном шаре $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{2k}^2 \leqslant x$ и объемом шара в предположении, что $k \geqslant 4$.

Эта оценка для четного k имеет вид:

$$P_{2k}(x) = \pi^k \{\Gamma(k)(1 - 2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \sum_{s=1}^{m} \psi_{k,s}(x) x^{k-s} + B x^{k - \frac{2m+1}{2}},$$

а для нечетного k — вид:

$$P_{2k}(x) = \pi^k \{\Gamma(k) L(k)\}^{-1} \sum_{s=1}^{m} \Phi_{k,s}(x) x^{k-s} + B x^{k - \frac{2m+1}{2}}.$$

Смысл обозначений следующий:

$P_{2k}(x)$ — вышеуказанная разность между числом целых точек и объемом шара;

$$\Psi_{k,s}(z) = \sum_{u=1}^{\infty} u^{s-k} \Theta(k, s) \overline{B}_s\left(\frac{z}{u}\right) + (-1)^{\frac{k}{2}+1} \sum_{g=2}^{\infty} g^{s-k} \Theta(k, s)\left(\overline{B}_s\left(\frac{z}{g}\right) - 2^s \overline{B}_s\left(\frac{z}{2g}\right)\right);$$

$$\Phi_{k,s}(z) = \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{\frac{u-1}{2}} u^{s-k} \Theta(k, s) \overline{B}_s\left(\frac{z}{u}\right) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{1-s} \sum_{l=1}^{\infty} (2l)^{s-k} \Theta(k, s)\left(\overline{B}_s\left(\frac{z}{l}\right) - 2^{s-1}\overline{B}_s\left(\frac{z}{2l}\right) - 2^{2s-1}\overline{B}_s\left(\frac{z-l}{4l}\right)\right);$$

$$L(k) = 1 - 3^{-k} + 5^{-k} - 7^{-k} + \ldots;$$

m — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k \geqslant 2(m+1)$; B ограничено по модулю при данном k; $\Theta(k, 0) = +1$, $\Theta(k, 1) = -1$, при $s \geqslant 2$

$$\Theta(k, s) = (-1)^s \frac{(k-1)\ldots(k-s+1)}{s!};$$

$\overline{B}_s(z)$ — периодическая функция с периодом 1, которая в интервале $0 \leqslant z < 1$ совпадает с полиномом Бернулли $B_s(z)$. Кроме того, в указанных суммах l принимает все натуральные значения, u — только нечетные, а g — только четные. Справедливость полученных оценок доказывается сначала для $m = 3$ (конечно, если $k \geqslant 8$), а затем в общем случае. Для случая же $m = 2$ устанавливается, что эта оценка совпадает с уже известной оценкой, полученной Вальфишем. *В. Д. Подсыпанин*

3211. **Односторонние неравенства для квадратичных форм. I. Тройничные формы. Оппенгейм** (One-sided inequalities for quadratic forms. I. Ternary forms. Oppenheim A.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 11, 328—337 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть $f(x, y, z)$ — данная неопределённая тройничная квадратичная форма с вещественными коэффициентами определителя $\Delta < 0$; P_1 и P_2 — точные нижние границы множеств положительных значений соответственно f и $-f$ (при целых x, y, z). Тогда:

1) $P_1^3 \leqslant 4|\Delta|$, $P_2^3 \leqslant \frac{27}{4}|\Delta|$, причем знаки равенства имеют место лишь при f, эквивалентной соответственно формам

$$a(x^2 + yz),\ a(x^2 + 4yz); \qquad (1)$$

2) если f не эквивалентна (1), то $P_1^3 \leqslant \frac{9}{4}|\Delta|$, $P_2^3 \leqslant \frac{343}{64}|\Delta|$, причем знаки равенства имеют место лишь при f, эквивалентной формам

$$a(3x^2+4yz), \quad a(x^2+16yz);$$

3) если f не эквивалентна $a(x^2+4yz)$ и $a(x^2+16yz)$, то $P_2^3 < 5{,}3|\Delta|$.

Утверждение (1) было доказано ранее Давенпортом (Davenport H., Proc. London Math. Soc., 1949, сер. 2, 51, 145—160). *Б. А. Венков*

3212. Минимумы неопределенных бинарных квадратичных форм. Сойер (The minima of indefinite binary quadratic forms. Sawyer D. B.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 387—394 (англ.)

Дано новое доказательство известной ранее теоремы: Существуют целые числа ξ, η, не равные одновременно нулю, такие, что

$$-\lambda\varphi_0(\lambda) \leqslant f/D^{\frac{1}{2}} \leqslant \lambda^{-1}\varphi_0(\lambda),$$

где $f = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2$ — данная форма с $D = b^2 - 4ac > 0$, $\lambda > 0$, $\varphi_0(\lambda) = \min[(4+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}, (4+\lambda^{-2})^{-\frac{1}{2}}]$. Неравенство будет строгим на обоих концах, за исключением случаев, когда λ^2 — целое число и f эквивалентна форме вида $f_0 = \mu(\xi^2 + \lambda^2\xi\eta - \lambda^2\eta^2)$, $\mu \neq 0$.

Доказана также следующая теорема: Если λ^2 — целое, но f не эквивалентна форме f_0, то φ_0 можно заменить на $\varphi_1(\lambda) = (4+(\lambda+\lambda^{-3})^2)^{-\frac{1}{2}}$, причем строгое неравенство будет иметь место, за исключением случая, когда $\lambda = 1$ и f эквивалентна форме вида $f_1 = \mu(\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2)$, $\mu \neq 0$. *Д. С. Горшков*

3213. Минимум некоторых неоднородных функций двух переменных. Роджерс (The minima of some inhomogeneous functions of two variables. Rogers K.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 394—402 (англ.)

Пусть $f(x, y)$ — однозначная и непрерывная функция вещественных переменных x и y, принимающая только неотрицательные значения и такая, что $f(-x, -y) = f(x, y)$. Обозначим через

$$k = \max\left[f\left(0, \frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}, 0\right), \min\left\{f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}\right].$$

Пусть кривая $f(x, y) = k$ имеет две асимптоты, проходящие через начало координат. Эти асимптоты делят плоскость на четыре области. Пусть в каждой из этих областей находится ветвь кривой, встречающая асимптоты только в бесконечности. Пусть, наконец, каждая ветвь ограничивает строго выпуклую область, для которой $f(x, y) \geqslant k$ (под строго выпуклой областью понимается выпуклая область, для каждой граничной точки которой существует прямая, не имеющая других общих точек с границей области).

При соблюдении этих условий для каждой точки (x_0, y_0) найдется точка (x, y) такая, что $x \equiv x_0 \pmod 1$, $y \equiv y_0 \pmod 1$ и $f(x, y) \leqslant k$. При этом знак равенства можно опустить, если точка (x_0, y_0) не эквивалентна по (mod 1) ни одной из трех точек $(0, {}^1/_2)$, $({}^1/_2, 0)$, $({}^1/_2, {}^1/_2)$. Эта теорема выводится из другой, немного более общей теоремы, доказанной в работе. *В. Д. Подсыпанин*

3214. Заметка о числе классов идеалов в вещественных квадратичных полях. Карлиц (Note on the class number of real quadratic fields. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 535—537 (англ.)

Пусть простое число $p \equiv 1 \pmod 4$, $h(p)$ — число классов идеалов в $R(\sqrt{p})$ и $E = 0{,}5(t + u\sqrt{p}) > 1$ — фундаментальная единица в $R(\sqrt{p})$. Автор исходит из сравнения

$$\frac{u}{t}h(p) \equiv B_{\frac{p-1}{2}} \pmod p, \qquad (1)$$

где числа Бернулли B_n определяются условиями:

$$(B+1)^{n+1} = B^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad B_0 = 1.$$

Из (1) автор выводит элементарными методами сравнения:

$$\frac{4uh(p)}{t} \equiv -\sum_{r=1}^{(p-1)/4} \frac{1}{r}\left(\frac{r}{p}\right) \pmod p \quad (p \equiv 5 \pmod 8),$$

$$\frac{2uh(p)}{t} \equiv \frac{A+B}{p} \pmod p,$$

где A равно произведению квадратичных вычетов, а B — произведению квадратичных невычетов из интервала $(0, p)$.

Примечание референта. Автор приписывает сравнение (1) Анкени, Артину и Човла (Ankeny N. C., Artin E., Chowla S., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, 37, 524—525; Ann. Math., 1952, 56, 479—493), однако это сравнение и его обобщение на случай любого дискриминанта $d > 0$ были доказаны ранее (Киселев А. А., Докл. АН СССР, 1948, 61, № 5, 777—779; Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. мат., 1949, 16, 20—31). *А. А. Киселев*

3215. Достаточные конгруенциальные условия для существования рациональных точек на некоторых кубических поверхностях. Сельмер (Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces. Selmer Ernst S.), Math. scand, 1953, 1, № 1, 113—119 (англ.)

Рассматриваются условия для существования нетривиальных, т. е. не чисто нулевых, решений в целых числах x_1, x_2, x_3, x_4 однородного кубического уравнения

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3 = 0, \quad a_1a_2a_3a_4 \neq 0, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) = 1, \qquad (1)$$

что равносильно наличию рациональных точек на соответствующей кубической поверхности. Морделл (Mordell L. J., Publ. Math. Debrecen, 1949, 1, 1—6) предположил, что для разрешимости (1) достаточна разрешимость сравнений

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0 \pmod 9, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1,$$
$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0 \pmod r, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1, \qquad (2)$$

где r — все простые числа вида $3k+1$, делящие $a_1a_2a_3a_4$.

В статье доказывается гипотеза Морделла в случае, когда отношение двух коэффициентов (1) к двум другим, например,

$$\frac{a_3a_4}{a_1a_2}, \tag{3}$$

есть рациональный куб. При условии (3) уравнение (1) сводится к следующему:

$$x^3 + my^3 = n(u^3 + mv^3), \tag{4}$$

где m и n — целые числа, не делящиеся на куб. При этом условия (2) сводятся к условиям:

$$\begin{aligned} &m\,(R)\,r, && \text{если } r \nmid n,\ r \nmid m,\\ &n\,(R)\,r, && \text{если } r \nmid m,\ r \nmid n,\\ &m'n'\,(R)\,r, && \text{если } m = r^i m',\ n = r^{3-i}n' \Big\} \ i = 1 \text{ или } 2\\ &m'n'^2\,(R)\,r, && \text{если } m = r^i m',\ n = r^i n' \Big\} \ r \nmid m'n', \end{aligned} \tag{5}$$

где r пробегает все простые числа вида $3k+1$, делящие mn; $m\,(R)\,r$ означает, что m есть кубический вычет (mod r).

Рассматривается чисто кубическое поле $K(m^{1/3}) = K(\vartheta)$; уравнение (4) заменяется тогда уравнением в идеалах

$$[x + y\vartheta] = \mathfrak{n}\,[u + v\vartheta], \tag{6}$$

где $\mathfrak{n}$ — произведение идеальных множителей, $N(\mathfrak{n}) = n$. Разрешимость же (6) при условиях (5) выводится из теоремы Хассе об относительных циклических полях (Hasse H., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1931, 64—69).

В заключение автор показывает, что его метод приложим к более общему уравнению

$$f_3(x, y) = nf_3(u, v),$$

где f_3 — произвольная бинарная кубическая форма. Отмечается также, что численная проверка для $|a_1a_2a_3a_4| \leqslant 500$ и некоторые так называемые «вероятностные» соображения согласуются с гипотезой Морделла и в общем случае (т. е. без дополнительного условия (3)). *А. В. Малышев*

3216. О теореме Глейшера. Карлиц (A theorem of Glaisher. Carlitz Leonard), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 306—316 (англ.)

Пусть p — простое число > 3 и

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) = x^{p-1} - A_1x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}.$$

В 1900 г. Глейшер (J. W. L. Glaisher) доказал сравнения

$$\begin{aligned} A_{2r} &\equiv -\frac{1}{2r} B_{2r}\ p \pmod{p^2},\\ A_{2r+1} &\equiv \frac{2r+1}{4r} B_{2r}\ p^2 \pmod{p^3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Автор уточняет эти сравнения, определяя вычеты $A_{2r+1} \pmod{p^5}$ и $A_{2r} \pmod{p^3}$. В частности, получается, что

$$\begin{aligned} 2rA_{2r+1} \equiv &-\frac{1}{2}\,p^2(p-2r-1)B_{2r} -\\ &-(2r+1)p^3\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{4i}\,B_{2i}B_{2r-2i} \pmod{p^4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Числа Бернулли в сравнениях (1) и (2) определяются на основании тождества

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!}\,x^m. \tag{3}$$

Из основных сравнений выводятся следствия, касающиеся вычетов чисел $\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}$ (число сочетаний) и $\frac{(np^r)!}{n!\,(p^r!)^n} \pmod{p^4}$. В силу соотношения

$$A_r = (-1)^r \binom{p-1}{r} B_r^{(p)},$$

где

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^p = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^{(p)}}{m!}\,x^m, \tag{4}$$

результаты Глейшера дают связь между коэффициентами рядов (3) и (4). Автор обобщает их, вводя произвольную функцию $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{x^m}{m!}$, где c_m — целые (mod p), и устанавливая сравнения, связывающие коэффициенты разложений функций $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ и $\left(\frac{x}{f(x)}\right)^{\pm p}$, а также функций $\frac{af'(x)}{1+af(x)}$ и $\left(\frac{1}{1+af(x)}\right)^{\pm p}$, где a — целое (mod p).

А. А. Киселев

3217. Некоторые теоремы о производной Шура. Карлиц (Some theorems on the Schur derivative. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 321—332 (англ.)

Если имеется последовательность рациональных чисел $\{a_m\}$ и простое число p, то определяется «производная Шура» $a'_m = (a_{m+1} - a_m)/p^{m+1}$. Производные высших порядков определяются последовательно

$$a_m^{(r)} = \frac{a_{m+1}^{(r-1)} - a_m^{(r-1)}}{p^{m+1}}.$$

Цорн p-адическим методом доказал, что если $x \equiv 1 \pmod{p}$ и $X_m = \frac{x^{p^m} - 1}{p^{m+1}}$, то

$$X_m^r \equiv \frac{(p-1)(p^2-1)\cdots(p^r-1)}{(r+1)!}\,X_m^{r+1} \pmod{p^m}$$

для $r < p$, а для $r < p-2$ сравнение справедливо по модулю p^{m+1} (Zorn M., Ann. Math., 1937, **38**, 451—464).

Автор передоказывает элементарно этот результат и получает новые результаты такого же типа. Далее подобные вопросы изучаются для полей алгебраических чисел. В качестве приложений теории доказываются утверждения о производных Шура от полиномов Эйлера и Бернулли.

А. Г. Постников

3218. Перестановки в конечном поле. Карлиц (Permutations in a finite field. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 538 (англ.)

Доказывается, что любая перестановка элементов x конечного поля Галуа $GF(q)$ может быть получена последовательным выполнением преобразований вида

$$\alpha x + \beta, \quad x^{q-2} \ (\alpha, \beta \in GF(q), \ \alpha \neq 0).$$

Д. С. Горшков

3219. Некоторые теоремы об обобщенных суммах Дедекинда. Карлиц (Some theorems on generalized Dedekind sums. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 513—522 (англ.)

Исследуется арифметическая функция

$$c_r(h, k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} P_{p+1-r}\left(\frac{\mu}{k}\right) P_r\left(\frac{\mu h}{k}\right),$$

где p, r — целые неотрицательные числа, $r \leqslant p+1$, $(h, k) = 1$ и $P_r(x)$ — многочлен Бернулли $= \sum_{s=0}^{r} B_s \binom{r}{s} (x-[x])^{r-s}$ ($[x]$ — наибольшее целое число $\leqslant x$, B_s — числа Бернулли: $B_0 = 1$, $B_s = \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant s} \binom{s}{\mu} B_\mu$). Для нечетного $p > 1$ доказывается теорема взаимности:

$$\binom{p+1}{r+1} h k^p c_{p-r}(h, k) + \binom{p+1}{r} k^p c_{p+1-r}(h, k) = \binom{p+1}{r+1} h^{p-r} (c(k, h) - k)^{r+1} c^{p-r}(k, h) + \binom{p+1}{r} (kB + hB')^{p+1-r} B'^r$$

(символическая запись). Главным средством доказательства является формула Апостола для трансформации ряда Ламберта

$$G_p(x) = \sum_{m, n=1}^{\infty} n^{-p} x^{mn}$$

(Apostol T. M., Duke Math. J., 1950, **17**, 147—157). При $r = 0$ получается теорема взаимности Апостола для арифметической функции $c_p(h, k)$, обозначенной Апостолом через $s_p(h, k)$ (однако теорема Апостола верна также при $p = 1$, т. е. в случае

$$s(h, k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{\mu h}{k} - \left[\frac{\mu h}{k}\right] - \frac{1}{2}\right),$$

для которого теорему взаимности доказал Дедекинд методом теории функций). Кроме того, доказывается ряд элементарных теорем, например формула $c_r(qh, qk) = q^{1-p} c_r(h, k)$, соответствующие результаты для других арифметических функций, связанных с $c_r(h, k)$, и формула

$$c_1(h, k) = \frac{B_{p+1-r} B_r}{k^p} + \frac{r(p+1-r)}{k^p} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{H_{p-r}(\zeta^{ht}) H_{r-1}(\zeta^{-t})}{(\zeta^{-ht}-1)(\zeta^t - 1)},$$

где $\zeta = e^{2\pi i/k}$ и $H_m(\rho)$ — числа Эйлера, определенные разложением $(1+\rho)(e^t+\rho)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\rho) t^m : m!$ ($\rho^k = 1$, $k > 1$, $\rho \neq 1$).

Работа содержит ряд ошибок и опечаток. Например, в левой части (3.5) вместо $k^p h c_p(k, h)$ должно быть $k h^p c_p(k, h)$, а в правой части множитель $p+1$ не нужен. *Э. К. Фогелс*

3220. Взвешенные квадратичные разбиения (mod p^r). Карлиц (Weighted quadratic partitions (mod p^r). Carlitz Leonard), Math. Z., 1953, **59**, № 1, 40—46 (англ.)

Пусть $p > 2$ — простое число, $\lambda_1, \ldots, \lambda_t, a_1, \ldots, a_t, c$ — фиксированные целые числа, причем все λ_i и все a_i не делятся на p. Автор находит значение суммы

$$S = \sum_{x_1, \ldots, x_t} e_r(2\lambda_1 x_1 + \cdots + 2\lambda_t x_t),$$

где $e_r(x) = \exp(2\pi i x / p^r)$, а $x_1, \ldots, x_t$ пробегают все системы вычетов по mod p^r, для которых $a_1 x_1^2 + \cdots + a_t x_t^2 \equiv c \pmod{p^r}$. Для $r = 1$ этот вопрос исследован автором в другой работе (РЖМат, 1954, 2859).

Здесь рассматривается случай $r \geqslant 2$.

Пусть

$$\delta = \prod_{i=1}^{t} a_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^{t} a_i' \lambda_i^2$$

(где $a_i' a_i \equiv 1 \pmod{p^r}$), s и w — показатели наибольших степеней p, на которые делятся соответственно c и ω. Особенно простой вид формулы для S имеют в следующих случаях:

1) если $s \geqslant r$, $w \geqslant r$, то $S = 0$;

2) если rt четно, $s \geqslant r$, $w = r-1$ (или $w \geqslant r$, $s = r-1$), то

$$S = -\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1};$$

3) в остальных случаях при $s \neq w$ $S = 0$;

4) если $s = w = 0$, $\left(\frac{c\omega}{p}\right) = -1$, то $S = 0$;

5) если $s = w = 0$, $c\omega \equiv k^2 \pmod{p^r}$, то

$$S = 2\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-r} \times \cos\left(\frac{4\pi k}{p^r} + \frac{1}{8}(p^r-1)^2 \pi\right),$$

если rt четно,

$$S = 2\left((-1)^{\frac{1}{2}(t-1)} p^{-1} \delta c\right) p^{\frac{1}{2}r(t+1)} \cos\frac{4\pi k}{p^r}$$

если rt нечетно

В доказательстве используется аппарат сумм Гаусса и Клостермана. Указывается, что эти результаты можно обобщить на случай, когда $x_1, \ldots, x_l$ пробегают системы вычетов по mod p^r, удовлетворяющих сравнению $Q(x_1, \ldots, x_l) \equiv c \pmod{p^r}$, где Q — любая квадратичная форма, дискриминант которой не делится на p.

В. Б. Демьянов

3221. Сумма делителей 5^m. Браун (The sums of the divisors of 5^m (Curiosa). Brown Alan L.), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 33 (англ.)

Как курьез демонстрируется свойство суммы делителей некоторых чисел, состоящее в том, что, например, для числа 5^m указанная сумма получается отбрасыванием последних двух цифр в десятичном изображении числа 5^{m+3}. *Д. С. Горшков*

3222. О диофантовом уравнении $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$. Мозер (On the Diophantine equation $1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n = m^n$. Moser Leo), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 84—88 (англ.)

Для указанного в заглавии диофантова уравнения известно только одно тривиальное решение $m=3$, $n=1\,(1+2=3)$, и существует гипотеза, что других решений у этого уравнения нет. Предполагая, что имеется решение m, n с $n>1$, автор при помощи элементарных средств выводит, в случае, если m нечетно, неравенство

$$\sum_{p/M} \frac{1}{p} > 3{,}16,$$

где $M = (m-1)(m+1)(2m-1)(2m+1)$.

Далее показывается, что $\sum_{p<10^7} \frac{1}{p} < 3{,}16$, откуда следует $M > \prod_{p<10^7} p$. Применяя известную оценку $\sum_{p\leqslant x} \ln p > \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)x$ при $x < e^{100}$ (Rosser B., Amer. J. Math., 1941, **63**, 211—232), автор получает, что $m > 10^{10^6}$. Небольшие изменения в деталях доказательства приводят к тому же результату и в случае, если m четно. Следовательно, если диофантово уравнение $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n = m^n$ имеет решение m, n с $n>1$, то $m > 10^{10^6}$. *В. Б. Демьянов*

3223. Решение сравнений $2x^2+1\equiv 0 \pmod{p^2}$ и $2x^2+1\equiv 0 \pmod{p^4}$. Глодан (Solution of the congruences $2x^2+1\equiv 0 \pmod{p^2}$ and $2x^2+1\equiv 0 \pmod{p^4}$. Gloden A.), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 88—90 (англ.)

Составлена таблица решений сравнения $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ для всех $p < 1000$, и описано, как это сделано. Указывается, что метод применим и для решения сравнения $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ для любого α. Способ решения сравнений не является новым и описан в учебной литературе (Виноградов И. М., Основы теории чисел, Гостехиздат, М.—Л., 1949, гл. IV, § 5; гл. V, § 4).

В. Д. Подсыпанин

3224. Итерация арифметических функций и одно свойство последовательности простых чисел. Шапиро (Iterates of arithmetic functions and a property of the sequence of primes. Shapiro Harold N.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 647—655 (англ.)

Автор рассматривает класс K арифметических функций, задаваемых так: для $n = \prod p_i^{\alpha_i}$

$$f(n) = \prod f(p_i)\,[A(p_i)]^{\alpha_i - 1},$$

где $f(p_i)$ — целое, $1 < f(p_i) < p_i$, $A(p_i)$ — целое $\leqslant p_i$ при p_i нечетном и $A(2) = 2$.

Если $f^k(n)$ обозначает k-ю итерацию функции $f(n)$, то для данного n есть единственное k такое, что $f^k(n) = 2$. Обозначается $k = C_f(n)$ (полагается формально $C_f(1) = C_f(2) = 0$).

Доказывается следующее свойство последовательности простых чисел: пусть арифметическая функция $g(x)$ принадлежит классу K и $C_g(p) \geqslant C_f(p)$ для всех $f \in K$ и всех p, тогда $g(3) = 2$, $g(5) = 4$ или 3, $g(p_i) = p_{i-1}$ при $i > 3$. Доказательство опирается на элементарные оценки из теории распределения простых чисел (Ramanujan S., J. Indian Math. Soc., 1919, **11**, 181—182; статья перепечатана в Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge, 1927, 208—209).

А. Г. Постников

3225. К 1814 вопросу. Парамесваран (On question 1814. Parameswaran S.), Math. Student, 1953, **21**, № 1—2, 50—52 (англ.)

Пусть $d > 1$ — целое рациональное число, не делящееся на квадрат простого числа; a и b — рациональные числа такие, что при $\lambda = a + b\sqrt{d}$ рациональные числа $\lambda + \bar{\lambda} = 2a$ и $\lambda\bar{\lambda} = a^2 - b^2 d$ суть целые; f — число четных чисел между $q+1$ и $q+m$.

Доказывается сравнение:

$$\sum_{n=q+1}^{q+m} [\lambda^n] \equiv -f + 2a^{q+1}\,\frac{a^m - 1}{a - 1} \pmod{d}$$

при $\lambda > 1$, $0 > \bar{\lambda} > -1$.

Полученный результат обобщает следующее сравнение (Ramanathan K. G., Math. Student, 1943, **11**, 63):

$$[\lambda^r] + [\lambda^{r-1}] + [\lambda^{r-2}] + [\lambda^{r-3}] \equiv 8 \pmod{10}$$

при $\lambda = 2\cos\frac{\pi}{5}$ и r целом.

П. Н. Реморов

3226. О работе Хуа Ло-гэна «Аддитивная теория простых чисел». Минь Сы-хао (介紹華羅庚的『堆壘素數論』。閔嗣鶴), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 7, 89—90 (кит.)

Дается краткий обзор многочисленных работ известного китайского математика Хуа Ло-гэна. В основном приводятся результаты работ Хуа Ло-гэна в области аддитивной теории чисел в связи с проблемами Варинга, Гольдбаха, системами

неопределенных уравнений, а также геометрической теории чисел: о числе целых точек в круге и сфере и др.

Кроме того перечисляются другие разделы математики, которым также посвящены многие работы Хуа Ло-гэна. *Г. В. Емельянов*

3227 К. Аддитивная теория простых чисел. Хуа Ло-гэн (堆壘素數論 o 華羅庚), 206 стр., Спец. выпуск Ин-та математики АН Китая, сер. А, № 1, 1953

Перевод книги Хуа Ло-гэна (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1947, **22**, 1—179) с добавлениями новых результатов И. М. Виноградова за период 1942—1947 гг. и работ автора за 1947 г. *Ю. Л.*

3228 К. Собрание сочинений. Т. III. Вороной Г. Ф., 306 стр., Изд-во АН УССР, Киев, 1953,. 20 р. 90 к.

Настоящим томом заканчивается издание полного собрания сочинений Г. Ф. Вороного, предпринятое Акад. наук УССР. Этот том содержит биографию Г. Ф. Вороного, сообщения и доклады, сделанные им на научных съездах, и извлечения из обширного рукописного архива, сохранившегося после его смерти.

Из докладов на съездах в подробном виде сохранились два. В одном из них Г. Ф. Вороной предлагает новый метод суммирования расходящихся рядов; этот метод известен советским математикам по переводу книги Харди (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 88). Другой доклад содержит теорему о связи между разложением целочисленного многочлена $f(x)$ на неприводимые множители по простому модулю $p>2$ и значением символа Лежандра (D/p), где D — дискриминант $f(x)$. Эта теорема в советской литературе известна под названием теоремы Штиккельбергера — Вороного (Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. II, сер. «Математика в монографиях», ОНТИ, Л.—М., 1937, 74—76).

Рукописи, извлеченные из научного архива и напечатанные в настоящем томе, примыкают по содержанию к трем основным направлениям работ Г. Ф. Вороного в теории чисел. В рукописях по аналитической теории чисел, напечатанных с комментариями Ю. В. Линника и Н. Г. Чудакова, обнаружены две формулы, весьма полезные в современных исследованиях о простых числах и характерах Дирихле; эти формулы в западно-европейской науке были получены лишь в 1918 г.: одна — Харди и Литлвудом, другая—Полиа (Polya G). Среди рукописей по теории алгебраических чисел, подготовленных к печати И. Р. Шафаревичем, имеется работа о великой теореме Ферма, т. е. о невозможности решения в целых числах $x, y, z\neq 0$ уравнения $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ при простом $\lambda>2$. Эта незаконченная работа интересна по идее: рассматривается квадратичное подполе поля деления круга $R\left(e^{\frac{2\pi i}{\lambda}}\right)$. Третья группа работ из архива относится к арифметико-геометрической теории неопределенных квадратичных форм и редактирована Б. А. Венковым. Из этих работ две были напечатаны ранее (Украинский мат. ж., 1951, **3**, № 3, 240—271, 272—278). В дополнение ко всем этим материалам напечатано краткое описание всего рукописного фонда Г. Ф. Вороного, составленное И. Б. Погребысским.

Среди комментариев помещены три письма Г. Ф. Вороного к В. А. Стеклову и перепечатана работа Б. А. Венкова «О приведении положительных квадратичных форм» (Изв. АН СССР, сер. мат., 1940, **4**, № 1, 37—52), непосредственно использующая содержание классического мемуара Вороного о совершенных квадратичных формах.

В конце тома (стр. 263—304) помещена биография Г. Ф. Вороного, написанная И. З. Штокало и И. Б. Погребысским. При составлении ее широко использованы материалы из архива и документы семейного характера.

В книге встречаются опечатки, например, в биографии в нескольких местах перепутаны инициалы А. Н. Коркина. *Б. А. Венков*

3229 Д. О некоторых элементарных методах в теории распределения простых чисел. Чулановский И. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Мат. ин-т им. Стеклова, М., 1953

3230 Д. Характеры числовых полугрупп с конечной и с бесконечной достаточно редкой базой. Бредихин Б. М. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Саратовский гос. ун-т, Саратов, 1953

См. также: 3365, 3394

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3231. Об одном способе решения кубического уравнения. Огай С. В., Тр. физ.-мат. фак. (Киргизский гос. ун-т), 1953, № 2, 125—127

Работа не содержит новых результатов. Излагаемый автором способ решения кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ является (не самым простым) вариантом принадлежащего Лобачевскому (Полное собрание сочинений, Гостехиздат, М.—Л., 1948, **4**, 290) способа решения уравнения при помощи подстановки $x = u - \frac{p}{3v}$. *Л. И. Головина*

3232. Обобщение теоремы Кронекера — Капелли о системе линейных уравнений. Черников (A generalization of the Kronecker-Capelli theorem on a system of linear equations. Tchernikow S. N., translated by Benster C. D., 1+19 pp., U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Los Angeles, Calif., NBS Rep. 2346, 1953) (англ.)

Перевод статьи С. Н. Черникова из Мат. сб., 1944, **15**(57), № 3, 437—448.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 716.

3233. Некоторые применения прямоугольных определителей к внутреннему и внешнему про-

изведению матриц. Стоякович (Quelques applications des déterminants rectangulaires aux produits intérieurs et extérieures des matrices. Stojaković Mirko), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 14, 688—690 (франц.)

Введенное автором ранее (Bull. Soc. math. phys. Serbie, 1952, **4**, № 1—2, 9—23; РЖМат, 1953, 73) понятие определителя прямоугольной матрицы используется для интерпретации (при помощи внутреннего и внешнего произведения по Грассману) известных фактов из теории определителей. Новых результатов работа не содержит.

Ф. Р. Гантмахер

3234. Собственные векторы многочлена от матрицы. Маннос (Eigenvectors of matric polynomials. Mannos Murray), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 1, 33—36 (англ.)

Доказана следующая теорема:

Пусть $f(x)$ — многочлен; для того, чтобы совпадали собственные векторы матриц A и $f(A)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) если собственному значению λ матрицы A соответствует элементарный делитель $(x-\lambda)^p$, где $p>0$, то $f'(\lambda)\neq 0$;

2) если собственным значениям λ_1 и λ_2, $\lambda_1\neq\lambda_2$, соответствуют линейные элементарные делители $x-\lambda_1$ и $x-\lambda_2$, то $f(\lambda_1)\neq f(\lambda_2)$.

Результаты работы почти целиком содержатся в одной теореме, приведенной в книге Ф. Р. Гантмахера (Теория матриц, Гостехиздат, М.—Л., 1953, теорема 9, стр. 132). *Я. М. Каждан*

3235. Теорема включения для характеристических чисел обобщенного векового уравнения. Барч (Ein Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen allgemeiner Matrizen-Eigenwertaufgaben. Bartsch Helmut), Arch. Math., 1953, **4**, № 2, 133—136 (нем.)

Для корней $\varkappa_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ обобщенного векового уравнения $\det(A-\varkappa B)=0$, где A, B — эрмитовы матрицы n-го порядка, причем B — положительно определенная матрица, устанавливается следующая теорема:

Пусть

$$q_j=\frac{(Ax)_j}{(Bx)_j}\quad (j=1,2,\ldots,n),$$

где $(Ax)_j$, $(Bx)_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ — компоненты векторов Ax, Bx. Фиксированный комплексный вектор $x\neq 0$ выбирается произвольно с одним лишь условием: при любом j либо $(Bx)_j\neq 0$, либо одновременно $(Ax)_j=(Bx)_j=0$ (в последнем случае соответствующее q_j не рассматривается). Тогда, если круг

$$|z-m|\leqslant r$$

содержит все частные q_j, то круг

$$|z-m|\leqslant r\sqrt{\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}}$$

содержит, по крайней мере, один из корней $\varkappa_j$; здесь $\beta_{\min}$ и $\beta_{\max}$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы B.

Частный случай этой теоремы для $B=E$ (E — единичная матрица) был установлен Виландтом (Wielandt H., Arch. Math., 1948—1949, **1**, 348—352; Math. Ann., 1949, **121**, 234—241).

Ф. Р. Гантмахер

3236. О некоторых матричных теоремах Фробениуса и Мак-Коя. Голдхабер, Уэйплс (On some matrix theorems of Frobenius and McCoy. Goldhaber J. K., Whaples G.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 3, 332—335 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра квадратных матриц порядка n над полем k, обладающая единицей. Известно, что в случае алгебраически замкнутого поля k эквивалентны следующие три свойства алгебры $\mathfrak{A}$:

(F). При некотором упорядочении собственных значений $\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)$ каждой матрицы A из $\mathfrak{A}$ для всех многочленов $f(x_1,\ldots,x_m)$ от некоммутирующих неизвестных $x_1,\ldots,x_m$ и всех конечных последовательностей $A_1,\ldots,A_m$ матриц из $\mathfrak{A}$

$$\lambda_i(f(A_1,\ldots,A_m))=f(\lambda_i(A_1),\ldots,\lambda_i(A_m)).$$

(M). Алгебра $\mathfrak{A}/\mathrm{rad}\,\mathfrak{A}$, где $\mathrm{rad}\,\mathfrak{A}$ есть максимальный нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{A}$, коммутативна.

(P). Для любых двух матриц A и B из $\mathfrak{A}$ можно так упорядочить собственные значения каждой из матриц A, B, $A+B$, что

$$\lambda_i(A+B)=\lambda_i(A)+\lambda_i(B).$$

Эквивалентность условий (F) и (M) была доказана Мак-Коем (Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 592—600), эквивалентность условий (F) и (P) — Голдхабером (Canad J. Math., 1952, **4**, 31—42). Еще раньше Фробениусом (Sitz. preuss. Akad. Wiss, 1896, 601—614) было доказано, что каждая коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает свойством (F). В настоящей работе эквивалентность условий (F), (M) и (P) доказана для произвольного поля k. Кроме того, доказано, что для квазиалгебраически замкнутого основного поля (т. е. такого, которое не является центром никакой некоммутативной алгебры с делением) условие (P) можно заменить более слабым условием:

(P′). Сумма любых двух нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{A}$ нильпотентна. *Л. И. Головина*

3237. Частичное упорядочивание, определяемое некоторыми матрицами. Джексон (A partial ordering defined by certain matrices. Jackson James R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 429—430 (англ.)

Устанавливается одно свойство матриц, которое, по мнению автора, представляет интерес с точки зрения математического описания календарного планирования промышленной продукции.

Пусть $P=\|p_{mn}\|$ — прямоугольная вещественная матрица размеров $M\times N$. Автор пишет $m<m'$ $(1\leqslant m,\ m'\leqslant M)$, если существуют целые числа $(1\leqslant)\,m_1,\ m_2,\ldots,m_k$ $(\leqslant M)$ и $(1\leqslant)\,n,\ n_1,\ n_2,\ldots,n_k$ $(\leqslant N)$, для которых

$$p_{mn}<0<p_{m_1n},\quad p_{m_1n_1}<0<p_{m_2n_1},\ldots$$
$$\ldots,p_{m_kn_k}<0<p_{m'n_k}.$$

Матрица P называется нециркулярной, если ни для какого m не выполняется соотношение $m \prec m$.

Основная теорема. Матрица $P = \| p_{mn} \|$ является нециркулярной в том и только в том случае, если перестановкой строк и столбцов ее можно привести к виду $Q = \| q_{mn} \|$, где из неравенства $q_{\mu\nu} > 0$ всегда следует $q_{mn} \geqslant 0$, если только $m \leqslant \mu$ и $n \leqslant \nu$.

Из теоремы вытекает следствие: квадратную нециркулярную матрицу, у которой в каждой строке и в каждом столбце имеется лишь по одному положительному элементу, можно перестановкой строк и столбцов так преобразовать, чтобы на главной диагонали стояли положительные элементы, а над главной диагональю — нули.

Ф. Р. Гантмахер

3238. Об одном способе приведения квадратичной формы к каноническому виду. Живоглядов В. Г., Тр. физ.-мат. фак. (Киргизский гос. ун-т), 1953, № 2, 111—117

Пусть $A_1 = \| a_{ik} \|$ — $m \times n$-матрица.

Рассматривается последовательность матриц

$$A_{k+1} = \begin{Vmatrix} \overline{M}^{(k)}_{k+1,\,k+1} & \cdots & \overline{M}^{(k)}_{k+1,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{M}^{(k)}_{m,\,k+1} & \cdots & \overline{M}^{(k)}_{mn} \end{Vmatrix}$$

$(k = 0, 1, \ldots, \min(m-1, n-1))$,

где

$$\overline{M}^{(k)}_{ij} = \begin{vmatrix} \overline{M}^{(k-1)}_{kk} & \overline{M}^{(k-1)}_{kj} \\ \overline{M}^{(k-1)}_{ik} & \overline{M}^{(k-1)}_{ij} \end{vmatrix} \text{ и } \overline{M}^{(0)}_{ij} = a_{ij}\,.$$

Элемент $\overline{M}^{(k-1)}_{kk} = \overline{M}^{(k)}_{\cdot} \neq 0$ называется основным элементом матрицы A_k.

Если A_1 — симметрическая матрица n-го порядка, то все матрицы A_{k+1} будут также симметрическими. Доказывается следующая основная теорема:

Квадратичную форму $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ с матрицей $\| a_{ij} \|_1^n$ можно привести к каноническому виду при помощи следующей формулы:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \overline{M}^{(i-1)}_{ik} x_k \right)^2 \left(\prod_{\nu=1}^{i} \overline{M}^{(\nu)} \right)^{-}$$

Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду оказывается частным случаем изложенного результата автора. *А. Ф. Голубчиков*

ГРУППЫ

3239. О квазицентре группы. Пик (Despre quasi-centrul unui grup. Pic Gh.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—2, 7—21 (рум.; резюме русск.)

Квазицентром группы G называется подгруппа, порождаемая всеми такими циклическими подгруппами G, каждая из которых перестановочна с любой подгруппой группы G; если s — элемент квазицентра, а t — некоторый элемент группы, то $s^{-1} t s = s^{\alpha} t^{\beta}$. Рассматриваются значения чисел α и β и показывается, что квазицентр группы G является нильпотентной и характеристической подгруппой группы G.

Доказывается, что если в квазицентре есть элементы бесконечного порядка, то квазицентр абелев. *А. П. Дицман*

3240. Одно обобщение ремаковского разложения. Сеп, Редеи (Eine Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung. Szép J., Rédei L.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 85—86 (нем.)

Производится тривиальное распространение теоремы Ремака-Шмидта на разложения группы в произведения нормальных делителей, отличающиеся от прямых разложений тем, что не делается никаких предположений о взаимных пересечениях сомножителей (предполагается только, что ни один из множителей не содержится в произведении остальных). *О. Н. Головин*

3241. О произведении попарно перестановочных циклических групп. Хупперт (Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Huppert Bertram), Math. Z., 1953, **58**, № 3, 243—264 (нем.)

Исследуются свойства Z_m-разложимых групп, т. е. групп, которые могут быть записаны в виде произведения m попарно перестановочных циклических групп конечного порядка. Наиболее подробно рассмотрены свойства Z_2-разложимых групп (гл. I и II). Из многочисленных теорем, доказанных для этих групп, отметим следующие: всякая Z_2-разложимая p-группа нечетного порядка содержит циклический нормальный делитель с циклической фактор-группой; всякая Z_2-разложимая группа нечетного порядка метабелева. Из теорем, доказанных для Z_m-разложимых групп при произвольном m (гл. III), наиболее важна следующая: всякая Z_m-разложимая группа сверхразрешима (т. е. обладает главным рядом, у которого порядки всех факторгрупп простые числа). *В. К. Туркин*

3242. Унитарные группы, порождаемые отражениями. Шепард (Unitary groups generated by reflections. Shephard G. C.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 3, 364—383 (англ.)

Исследуются группы, которые можно рассматривать как обобщение групп, порождаемых отражениями в евклидовом пространстве E_n. Автор называет p-кратным отражением в унитарном пространстве U_n унитарное преобразование, p-ая степень которого равна тождественному преобразованию и которое переводит какую-либо гиперплоскость пространства U_n в саму себя. Рассматриваются группы, порождаемые такого рода отражениями в U_n. Дан метод построения графических изображений таких групп, являющийся обобщением метода Коксетера построения диаграмм для групп, порождаемых отражениями в E_n. Подробно исследованы группы, обозначаемые в соответствии с видом их графического изображения через $[p\,q;\,r]^m$; эти группы представляют интерес вследствие их связи с группами симметрии политопов. *В. К. Туркин*

3243. О выделении подгруппы элементов конечного порядка в качестве прямого слагаемого в группах типа P. Виленкин Н. Я., Мат. сб., 1953, 33(75), № 1, 37—44

Автор продолжает свои исследования нульмерных локально компактных групп со второй аксиомой счетности, примарных по некоторому простому числу p (группы типа P). В предыдущих работах (Мат. сб., 1951, 28(70), 503—536; 29(71), 13—30, 31—62) были рассмотрены случаи, когда группа не содержит элементов конечного порядка и когда совокупность элементов конечного порядка всюду плотна в группе. Здесь рассматривается промежуточный случай. Пусть G^1 — замыкание подгруппы элементов конечного порядка группы G типа P, причем $G^1 \neq 0$, $G^1 \neq G$ и, кроме того, факторгруппа G/G^1 не содержит элементов конечного порядка. Предполагается, что G — вполне правильно расслоенная группа и H — ее вполне правильная открытая и компактная подгруппа. Найдены условия для G и H, при которых подгруппа G^1 является прямым слагаемым группы G. Те из условий, которые относятся к G, являются также необходимыми. *М. И. Граев*

3244. О предположении Ивасавы и Глисона. Ямабе (On the conjecture of Iwasava and Gleason. Yamabe Hidehiko), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 48—54 (англ.)

Доказывается теорема: если локально компактная группа обладает окрестностью единицы, не содержащей нетривиальных нормальных делителей, то она обладает также окрестностью единицы, не содержащей нетривиальных подгрупп.

Автор отмечает, что этот результат, совместно с результатами последующей статьи, даст положительный ответ на предположение Ивасавы и Глисона о том, что любая (необязательно конечномерная) локально компактная группа является обобщенной группой Ли. *М. И. Граев*

3245. Изоморфизмы групповых алгебр абелевых групп. Хелсон (Isomorphisms of abelian group algebras. Helson Henry), Arkiv mat., 1953, 2, № 5, 475—487 (англ.)

Выясняются условия, при которых из изоморфизма групповых алгебр $L(G)$ и $L(H)$ двух локально компактных абелевых групп G и H вытекает изоморфизм самих групп. Предположим, что T — понижающий норму изоморфизм $L(G)$ на $L(H)$; тогда группы G и H изоморфны, оператор T изометричен и имеет следующее представление: существуют изоморфизм γ G на H, фиксированный характер $\hat{\gamma}$ на H и постоянная k, зависящая от выбора меры Хаара в H, такие, что $Tf = k\hat{\gamma} \cdot f^{\gamma}$ для всех $f \in L(G)$; аналогичный результат, без дополнительного предположения о коммутативности групп G и H, был получен Уэнделом (Wendel J., Pacif J. Math., 1951, 1, 305—311).

Предположим, что оператор T осуществляет изоморфизм $L(G)$ на $L(H)$, норма T меньше двух и что, по крайней мере, одна из групп, двойственных группам G и H, связна. Тогда приведенное выше утверждение также имеет место. Ссылаясь на существование противоречащего примера с конечными группами, автор отмечает, что то или иное предположение типа связности необходимо для справедливости теоремы. *М. И. Граев*

3246. Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые представления. Гельфанд И. М., Граев М. И., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 2, 221—224

Пусть $x(g)$—непрерывная функция на группе Ли G, равная нулю вне некоторого компактного множества. В статье решается общая задача определения значения $x(e)$ функции $x(g)$ в единичном элементе e группы по заданным значениям интеграла этой функции по классу сопряженных элементов «общего положения». Основная трудность здесь состоит в том, что в случае некомпактной группы G единичный элемент e есть особый класс, не являющийся предельным для класса «общего положения».

Метод решения основан на следующем обобщении одного результата М. Рисса (Riesz M., Acta math , 1949, 81, № 1—2, 1—223):

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого ограниченного множества, а

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

—невырожденная квадратичная форма, то при нечетном n функция

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times |A(x_1, \ldots, x_n)|^{\lambda/2}\, dx_1 \ldots dx_n$$

регулярна при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, а ее аналитическое продолжение имеет особые точки (полюсы) только при $\lambda = -n, -(n+2), \ldots, -(n+2k), \ldots$ Вычеты относительно этих особых точек определяются по формулам

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Выч}_{\lambda=-n} R(\lambda) = c_0 f(0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{Выч}_{\lambda=-(n+2k)} R(\lambda) = c_k\, \Delta^k f\,|_{x_1=\ldots=x_n=0} \end{array}\right\}, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \sum_{i,\,j=1}^{n} \beta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} \quad \text{и} \quad \|\beta_{ij}\| = \|\alpha_{ij}\|^{-1}.$$

Идея метода иллюстрируется на примере группы G всех невырожденных комплексных матриц с вещественным определителем. В этом случае класс «общего положения» есть совокупность всех матриц $g \in G$, эквивалентных фиксированной диагональной матрице δ с различными собственными значениями. Матрицу g можно тогда задавать при помощи δ и совокупности $\bar{g}$ остальных параметров, так что $x(g) = x(\bar{g}, \delta)$; при этом интеграл по классу определяется как

$$I_\delta = |D(\delta)|^{-1} \int x(\bar{g}, \delta)\, \omega(\bar{g}, \delta)\, d\bar{g},$$

где $\omega(\bar{g}, \delta)$ — якобиан перехода от dg к $d\bar{g}, d\delta$, а $D(\delta)$ — дискриминант характеристического многочлена матрицы δ. Если $\varphi(g) = \varphi(\delta_g)$ — произвольная функция собственных значений матрицы g, то

$$\int x(g)\, |\varphi(g)|^{\lambda/2}\, dg = \int I_\delta\, |D(\delta)|\, |\varphi(\delta)|^{\lambda/2}\, d\delta.$$

Применение формул (1) к обеим частям последнего равенства приводит к формуле вида

$$x(e) = c \prod_{i<j} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} - \frac{\partial}{\partial \mu_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mu}_i} - \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}_j}\right) I_\delta \Big|_{\delta=e},$$

$$\lambda_k = e^{\mu_k}, \qquad (2)$$

впервые полученной И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (Докл. АН СССР, 1948, **63**, № 6, 609—612; Тр. мат. ин-та им. Стеклова, 1950, **36**, 1—288). Из этой формулы вытекает аналог формулы Планшереля, осуществляющей разложение регулярного представления группы G на неприводимые представления.

М. А. Наймарк

3247. Аналог формулы Планшереля для вещественных полупростых групп Ли. Гельфанд И. М., Граев М. И., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 3, 461—464

Пусть $x(g)$ — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция на группе G вещественных унимодулярных матриц порядка n, равная нулю вне малой окрестности единицы группы G; G_k — совокупность матриц, имеющих k пар комплексно-сопряженных собственных значений $\delta_j = e^{\tau_j \pm i\varphi_j}$ $(j \leqslant k)$ и $n-2k$ вещественных собственных значений $\delta_j = e^{\tau_j}$ $(k<j\leqslant n-k)$. В G можно выбрать в качестве системы параметров систему, включающую в себя числа τ_j $(j \leqslant n-k)$ и φ_j $(j \leqslant k)$. Остальные параметры обозначим через $\bar{g}_k$. Положим

$$I_\delta^{(k)} = |D(\delta)|^{-1/2} \int x(\delta, \bar{g}_k)\, \omega_k(\delta, \bar{g}_k)\, d\bar{g}_k,$$

где $D(\delta)$ — дискриминант характеристического многочлена диагональной матрицы δ, а $\omega_k(\delta, \bar{g}_k)$ — якобиан перехода к параметрам τ_j, φ_j и $\bar{g}_k$. Тогда

$$x(e) = c_n L_n\left(I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_{\delta=e};$$

здесь c_n — некоторые постоянные; L_n — линейный однородный дифференциальный оператор порядка $\frac{n(n-1)}{2}$, имеющий для группы матриц четного порядка $n = 2k$ вид

$$L_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k-1} \left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right] \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\right\} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)^2\right] \times \left[\frac{\partial}{\partial\tau_i^2} + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)^2\right]\right\} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial\varphi_i},$$

а для группы матриц нечетного порядка $n = 2k+1$ вид

$$L_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k} \left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right] \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\right\} \times \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_i^2}\right) \frac{\partial}{\partial\varphi_i}.$$

Интеграл $I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ может быть выражен через характеры основных серий представлений. Отсюда при помощи преобразования Фурье на коммутативной группе матриц δ получается аналог теоремы Планшереля.

Н. Я. Виленкин

3248. Линейные алгебры Ли размерности n^2-1 или n^2-2. Гуревич Г. Б., Тр. Тульского мех. ин-та, 1953, № 6, 3—7

В алгебре Ли всех комплексных матриц порядка n определяются все подалгебры размерностей n^2-1 и n^2-2. Совокупность всех матриц со следом нуль образует подалгебру размерности n^2-1. Другие подалгебры размерности n^2-1 существуют лишь при $n=2$. Все они сопряжены между собой. Подалгебры размерности n^2-2 существуют лишь при $n=2$ и $n=3$ (в каждом случае по два класса сопряженных подалгебр). При выводе этих результатов используются понятия, введенные автором ранее (Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, **13**, 403—416).

Е. Б. Дынкин

3249. Проективная плоскость над октавами и особые группы Ли. Титс (Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. Tits J.), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, № 3, 309—329 (франц.)

Октавы (или числа Кэли) образуют 8-мерную неассоциативную алгебру $\mathfrak{A}$ над полем вещественных чисел. В $\mathfrak{A}$ вводится евклидова метрика, удовлетворяющая условию $|xy| = |x|\,|y|$. Проективная плоскость $\mathfrak{P}$ над $\mathfrak{A}$ есть 16-мерное многообразие, которое строится путем надлежащего дополнения множества пар $x, y \in \mathfrak{A}$ бесконечно удаленными элементами. Фрейденталь показал (Freudental H., Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Math. Inst. der Rijksuniversiteit, Utrecht, 1951), что группа Γ всех коллинеаций $\mathfrak{P}$ есть некоторая вещественная форма особой простой группы Ли E_6.

Каждому из «образов второго порядка»

$$|x|^2 + |y|^2 + 1 = 0$$

и

$$|x|^2 + |y|^2 - 1 = 0$$

соответствует некоторый поляритет (т. е. отображение множества всех точек $\mathfrak{P}$ на множество всех прямых $\mathfrak{P}$). Автор показывает, что группы коллинеаций Γ_1 и Γ_2, сохраняющие эти поляритеты, суть некоторые вещественные формы особой группы F_4, причем Γ_1 — компактная форма. Группа Γ_1 действует транзитивно на $\mathfrak{P}$. Соответствующая стационарная подгруппа есть универсальная накрывающая $\overline{O(9)}$ ортогональной группы $O(9)$. Группа Γ_2 действует транзитивно на множестве $\mathfrak{P}_1 = \{|x| +$

$+|y|<1\}$. Соответствующая стационарная подгруппа также изоморфна $\overline{O(9)}$. В множестве $\mathfrak{P}$ вводится метрика, инвариантная относительно Γ_1, а в множестве $\mathfrak{P}_1$ — метрика, инвариантная относительно Γ_2. Относительно этих метрик $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_1$ суть симметрические пространства. *Е. Б. Дынкин*

3250. Об особой группе E_7. Фрейденталь (Sur le groupe exceptionnel E_7. Freudenthal Hans), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 2, 81—89; Indagationes math., 1953, **15**, № 2, 81—89 (франц.)

Особая простая группа Ли E_7 имеет линейное симплектическое представление φ размерности 56. Как было указано в диссертации Э. Картана (Cartan E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Paris, 1894), соответствующая линейная группа $\varphi(E_7)$ совпадает со связной компонентой единицы в группе всех симплектических матриц, оставляющих инвариантной некоторую форму четвертой степени J. Автор устанавливает, что указанное Картаном выражение для формы J содержит ошибку; эта ошибка исправляется.

Заметим, что после доказательства того, что форма J инвариантна относительно $\varphi(E_7)$, дальнейших выкладок можно было бы избежать, если опереться на общий результат референта о максимальных подгруппах классических групп (Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, 39—166). Действительно, из этого результата видно, что $\varphi(E_7)$ является максимальной связной подгруппой в группе Sp(56) всех симплектических матриц порядка 56. С другой стороны, группа $\mathfrak{G}$ всех симплектических матриц, оставляющих инвариантной форму J, очевидно, удовлетворяет включениям $\varphi(E_7)\subset\mathfrak{G}\subset \mathrm{Sp}(56)$. Следовательно, $\varphi(E_7)$ есть связная компонента единицы в группе $\mathfrak{G}$. *Е. Б. Дынкин*

3251. Об особой группе E_8. Фрейденталь (Sur le groupe exceptionnel E_8. Freudenthal Hans), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 2, 95—98; Indagationes math., 1953, **15**, № 2, 95—98 (франц.)

Дается построение 248-мерной алгебры Ли, соответствующей особой простой группе Ли E_8. Выписываются в явном виде структурные формулы. Автор отмечает, что его конструкция более симметрична, чем конструкция, содержащаяся в диссертации Э. Картана. *Е. Б. Дынкин*

3252. О характеристических инвариантах полупростых групп. Фрейденталь (Sur les invariants caractéristiques des groupes semi-simples. Freudenthal Hans), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 2, 90—94; Indagationes math., 1953, **15**, № 2, 90—94 (франц.)

В алгебре Ли R рассматриваются трилинейная форма

$$Q_1(A, B, C) = ([A, B], C)$$

и биквадратичная форма

$$Q_2(A, B) = ([A, B], [A, B]),$$

где $[A, B]$ означает коммутатор, (A, B) — скалярное произведение Картана.

Пусть $\mathfrak{G}(Q_i)$ — группа всех линейных преобразований пространства R, сохраняющих форму Q_i, и $\mathfrak{G}_0(Q_i)$ — ее связная компонента единицы. Доказывается, что если R — полупростая алгебра Ли и в ее разложении на простые идеалы отсутствуют слагаемые ранга 1, то группы $\mathfrak{G}_0(Q_1)$ и $\mathfrak{G}_0(Q_2)$ совпадают с группой всех внутренних автоморфизмов R (для простой алгебры ранга 1 эта теорема перестает быть верной). Отметим, что сформулированная теорема может быть легко выведена из результатов референта об отношениях включения между неприводимыми подгруппами группы матриц (Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, 39—166). *Е. Б. Дынкин*

3253. Пространство группоидов над компактом. Эллис, Ланг (The space of groupoids over a compactum. Ellis David, Lang Gaines), Acta math., 1953, **89**, № 3—4, 209—215 (англ.)

Группоидом над множеством M называется множество M с заданной в нем однозначной, всюду определенной бинарной алгебраической операцией. Рассматривается множество $\mathfrak{G}$ всех группоидов над данным компактом M. Если $a\in\mathfrak{G}$, то через xay обозначается результат применения операции в a к упорядоченной паре (x, y) элементов из M. Так как множество всех группоидов над компактом можно также рассматривать как множество всех однозначных функций, заданных на $M\times M$ и принимающих значение в M, то с помощью метрики в M можно ввести метрику в $\mathfrak{G}$, определяемую формулой

$$\delta(a, b) = \sup_{x,\, y\in M} \delta(xay,\ xby),$$

где $a, b\in\mathfrak{G}$, что превращает $\mathfrak{G}$ в полное метрическое пространство.

Доказывается, что в пространстве $\mathfrak{G}$ будут замкнутыми следующие подмножества: 1) подмножество $\mathfrak{C}$ всех непрерывных группоидов; 2) подмножество $\mathfrak{S}_\gamma$ всех непрерывных полугрупп; 3) подмножество $\mathfrak{Q}_\tau$ всех топологических квазигрупп, т. е. всех квазигрупп, у которых непрерывна не только основная операция, но и правая и левая обратные операции; 4) подмножество $\mathfrak{L}_\tau$ всех топологических луп, 5) подмножество $\mathfrak{G}^*_\tau$ всех топологических групп, 6) подмножество $\mathfrak{A}$ всех коммутативных групп, 7) подмножество $\mathfrak{A}_\gamma$ всех непрерывных коммутативных групп. *В. В. Вагнер*

3254. К теории квазигрупп: квазигруппы, подчиняющиеся «закону ключей», или автоморфизмы некоторых групп подстановок. Сад (Contributions à la théorie des quasi-groupes: quasi-groupes obéissant à la «loi des keys» ou automorphes par certains groupes de permutations de leur support. Sade Albert), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 6, 420—422 (франц.)

В абелевой группе A с аддитивной записью операции фиксируем элемент a. Определим на A новую записываемую мультипликативно операцию $xy = a - x - y$. Относительно этой операции A является квазигруппой, удовлетворяющей тождеству

$$(xy)y = x,$$

называемому, согласно Такасаки (Takasaki M., Tôhoku Math. J., 1943, **49**, 145—207), «законом ключей» («loi des keys»).

Изучаются квазигруппы, удовлетворяющие закону ключей, а также квазигруппы, удовлетворяющие закону «двусторонних ключей»:

$$(xy)y = y(yx) = x.$$

Ю. И. Соркин

3255 РЕЦ. Теория групп. Курош А. Г., изд. 2-е, 467 стр., Гостехиздат, М., 1953, 16 р. 85 к. [**Рецензия: Черников С. Н.**, Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 6 (58), 173—176]

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3256. О пополнении в теории нормирований. Лоренцен (Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie. Lorenzen Paul), Math. Z., 1953, **59**, № 1, 84—87 (нем.)

Показывается, что для каждого счетного нормированного поля K существует счетное расширение $\bar{K}$ поля K такое, что 1) нормирование K может быть продолжено до нормирования $\bar{K}$ и 2) для каждого алгебраического расширения M поля $\bar{K}$ существует не больше одного нормирования поля M, продолжающего нормирование поля $\bar{K}$. *З. И. Боревич*

3257. К теории гензелевых колец. Нагата (On the theory of Henselian rings. Nagata Masayoshi), Nagoya Math. J., 1953, **5**, 45—57 (англ.)

Предположим, что o — целозамкнутое кольцо с полем отношений K. Автор исследует обобщение гильбертовой теории групп разложения и т. д. для простых идеалов в кольце целых относительно o элементов максимального сепарабельного замыкания $\bar{K}$. Работа, относящаяся в основном к теории идеалов, применяется для исследования вариантов леммы Гензеля для колец с метрикой. Кольцо o называется локально гензелевым относительно простого идеала $\mathfrak{p}$, если имеет место следующее: если многочлен $f(x)$ со старшим коэффициентом 1 и коэффициентами в o разлагается по модулю $\mathfrak{p}$ на произведение многочленов $g_0(x)$ и $h_0(x)$ со старшими коэффициентами 1 и если их результант не принадлежит $\mathfrak{p}$, то $f(x)$ разлагается на произведение таких двух многочленов $g(x)$ и $h(x)$ со старшими коэффициентами 1, что $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x)$ по модулю $\mathfrak{p}$. Далее, o называется гензелевым, если оно квазилокально и локально гензелево относительно своих максимальных идеалов.

Теория групп разложения применяется к доказательству единственности (в естественном смысле) алгебраических расширений заданного кольца o, которые локально гензелевы или гензелевы (последнее является кольцом отношений локально гензелева расширения относительно расширенного простого идеала). В этих кольцах сохраняются обычные свойства полей разложений идеалов и пополнений по метрике. Затем автор применяет свои результаты к кольцам с метрикой, но не пользуется обычными соображениями о группе значений метрики и доказывает общую форму леммы Гензеля, содержащую результанты в форме, близкой к данной Рыхликом (Rychlik, J. reine und angew. Math., 1923, **153**, 94—107) Наконец, доказывается теорема о независимости для конечного числа колец с метриками. *Шиллинг (O. F. G. Schilling)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 6, 529—530.

3258. О нильпотентности некоторых видов колец. Нагата (或る種の環の冪零性について。永田雅宜), 数學 (Сугаку), 1953, **4**, № 4, 38—39 (япон.)

В неопубликованной работе автор показал, что если ниль-алгебра $\mathfrak{A}$ над полем характеристики нуль имеет ограниченные показатели нильпотентности (т. е. $x^n = 0$ для всех x из $\mathfrak{A}$), то она нильпотентна. Это же справедливо для алгебр над полями простой характеристики p, если p достаточно велико; условие $p > n$ является для этого необходимым. В настоящей работе, предполагая $p > n$, автор устанавливает необходимые и достаточные условия для нильпотентности ниль-алгебры $\mathfrak{A}$. Из этих условий вытекает, что справедливость равенства $\mathfrak{A}^t = 0$ зависит лишь от характеристики p основного поля.

В работе показано также, что для доказательства нильпотентности ниль-алгебры $\mathfrak{A}$ достаточно доказать нильпотентность лиевой ниль-алгебры, показатели нильпотентности элементов которой ограничены тем же числом n, или же доказать, что длины возрастающих центральных рядов конечных p-групп, все элементы которых имеют порядок p, ограничены числом, зависящим лишь от p. *А. Г. Курош, Лю Шао-сюэ*

3259. Треугольные представления линейных алгебр. Дрейзин (Triangular representations of linear algebras. Drazin M. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 595—600 (англ.)

Пусть R — ассоциативная алгебра с конечным числом образующих над алгебраически замкнутым полем K, причем коммутант R_1 этой алгебры квазинильпотентен в том смысле, что для любой бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ (не обязательно различных) элементов из R_1 существует такое натуральное число n, что $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 = 0$. Пусть U есть левый R-модуль над полем K. Элемент u из U называется собственным вектором элемента $d \in R$, если для некоторого скалярного α $du = \alpha u$.

В работе доказано, что при выполнении одного из двух условий: 1) алгебра R является алгебраической, или 2) модуль U конечномерный,— существует собственный вектор, общий для всех элементов из R (обобщение известного результата о существовании общего собственного вектора для любого множества коммутирующих между собой матриц над алгебраически замкнутым полем). Эта теорема несколько уточняется для алгебр, нижний центральный ряд которых оканчивается нулем. Указывается конструкция представления алгебры R (вообще говоря) бесконечными треугольными матрицами над полем K, что обобщает один из результатов Мак-Коя о треугольных представлениях (McCoy N. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 592—600); однако, даже если U имеет счетный базис и R не содержит нетривиальных U-аннуляторов, это представление может не быть точным. *Л. П. Головина*

3260. Операция Казимира для альтернативных алгебр. Шафер (The Casimir operation for alternative algebras. Schafer R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 444—451 (англ.)

В работе рассматриваются альтернативные алгебры конечного ранга над полем характеристики 0; используются результаты автора (Trans. Amer

Math: Soc., 1952, **72**, 1—17). Операция Казимира, определенная для ассоциативных алгебр в работе Хохшилда (Hochschild G., Amer. J. Math., 1942, **64**, 677—694), обобщается на альтернативные алгебры. При помощи этой операции доказывается теорема, позволяющая несколько упростить принадлежащее автору доказательство обобщения основной теоремы Веддербарна (о расщеплении алгебры на радикал и полупростую подалгебру) для альтернативных алгебр (Schafer R. D., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 604—614). *Я. В. Хион*

3261. Упорядоченные алгебры с делителями нуля. Земмер (Ordered algebras which contain divisors of zero. Zemmer Joseph L.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 177—183 (англ.)

Изучаются главным образом упорядоченные алгебры A конечного ранга над полем F. Пусть A не разлагается в прямую сумму подалгебр. Если упорядоченная алгебра A не нильпотентна, то она имеет следующую структуру: A содержит одностороннюю (например, правую) единицу e; факторалгебра A/N алгебры A по ее радикалу N является упорядоченным полем; существует полупрямое разложение $A=B+T+U$, где $B\cong A/N$, $T+U=N$, $T=eNe$ и $eU=0$. Кроме очевидных соотношений $BU=TU=UU=0$, выполняется также и следующее: $UT=0$. Если B нормально над F (либо если упорядоченность алгебры A архимедова), то элементы из B и T коммутируют между собой: $bt=tb$.

Интересны следующие факты, справедливые для любых упорядоченных колец: 1) если кольцо A разлагается в прямую сумму идеалов $A=A_1+A_2$, то одно из A_i должно быть нулевым кольцом, т. е. $A_i^2=0$; 2) если упорядоченное кольцо N нильпотентно: $N^k=0$, $N^{k-1}\neq 0$, то существует элемент $x\in N$, для которого $x^k=0$, $x^{k-1}\neq 0$.

В связи с последним результатом ставится общий вопрос: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы в нильпотентной алгебре N могла быть введена упорядоченность.

В. М. Курочкин

3262. Полудедекиндовость в относительно атомных непрерывных сверху структурах. Сасаки (Semi-modularity in relatively atomic, upper continuous lattices. Sasaki Usa), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 409—416 (англ.)

Структура с 0 называется относительно атомной, если из $a<b$ следует $a<a\cup p\leqslant b$ для некоторой точки p. Если $\{a_\delta;\ \delta\in D\}$ — направленное множество элементов полной структуры L и из $a_\delta\uparrow a$ следует $a_\delta\cap b\uparrow a\cap b$ для каждого элемента b, то L называется непрерывной сверху. Структура называется полудедекиндовой, если выполняется условие (ξ'): если a и b покрывают c и $a\neq b$, то $a\cup b$ покрывает a и b. $(b, c)\,M$ обозначает, что из $a\leqslant c$ следует $(a\cup b)\cap c=a\cup(b\cap c)$. Структура с 0 называется полудедекиндовой в смысле Уилкокса, если

(A) Из $(b, c)\,M$, $b\cap c=0$ следует $(c, b)\,M$.

(B) Из $b\cap c\neq 0$ следует $(b, c)\,M$.

Следствием этих условий является условие (α): из $(b, c)\,M$ следует $(c, b)\,M$.

Кроме вышеперечисленных, рассматриваются еще следующие условия:

(η'') Если p — точка, то для любого элемента a либо $p\leqslant a$, либо $a\cup p$ покрывает a.

($\overline{\eta}$) Если h покрывается 1, то или $a\leqslant h$ или a покрывает $a\cap h$ для каждого элемента a, для которого $a\cap h\neq 0$.

(P) Если $p\leqslant q\cup a$, $r\leqslant a$, где p, q и r — точки и a — произвольный элемент, то существует точка s такая, что $p\leqslant q\cup r\cup s$, $s\leqslant a$.

Доказывается, что

1. Относительно атомная непрерывная сверху структура полудедекиндова тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (α).

2. В относительно атомной непрерывной сверху структуре комбинации условий (A) и (B), (η'') и (η), (ξ') и (P) эквивалентны. *А. Х. Лившиц*

3263. К теории некоммутативных структур. Йордан (Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände. Jordan Pascual), Acad. Wiss. und Liter., Abhand. math.-naturwiss. Kl., 1953, № 2, 1—6 (нем.)

Косой структурой называется множество с двумя ассоциативными, но не обязательно коммутативными операциями $\bigcap$, $\bigcup$, удовлетворяющими условию $a\cap(b\cup a)=(a\cap b)\cup a=a$. Приводятся две различные конструкции, при помощи которых из коммутативной структуры строится косая структура.

Если исходная коммутативная структура является дедекиндовой, то косая структура удовлетворяет тождеству: $[(c\cap b)\cup a]\cap(b\cup c)=(c\cap b)\cup[a\cap(b\cup c)]$. Такая косая структура является некоммутативным обобщением дедекиндовой структуры. Приводятся тождества, которым удовлетворяют различные виды косых структур. *А. Х. Лившиц*

3264. Об обобщении понятия структуры. Бенадо (Asupra unei generalizări a noțiunii de structură. Benado Mihail), Bul. Științ. Acad. R. P. Române; Sec. mat. și fiz., 1953, **5**, № 1, 41—48 (рум.; резюме русск., франц.)

Частично упорядоченное множество P называется мультиструктурой, если выполняются условия:

1. Если $a, b\in P$ и если существует такое $\Omega\in P$, что $\Omega\geqslant a$, $\Omega\geqslant b$, то найдется такое $M\in P$, что $M\leqslant\Omega$, $M\geqslant a$, $M\geqslant b$ и из $M'\leqslant M$, $M'\geqslant a$, $M'\geqslant b$ следует $M'=M$.

2. Если $a, b\in P$ и если существует такое $\omega\in P$, что $\omega\leqslant a$, $\omega\leqslant b$, то найдется такое d, что $d\geqslant\omega$, $d\leqslant a$, $d\leqslant b$ и из $d'\geqslant d$, $d'\leqslant a$, $d'\leqslant b$ следует $d'=d$.

Дается также равносильное определение: мультиструктурой называется множество с соотношением тождества и двумя операциями $\bigcup$ и $\bigcap$, не обязательно универсальными и не обязательно однозначными, удовлетворяющее приводимым автором условиям.

Приводятся примеры мультиструктур и изучаются некоторые их свойства. *А. Х. Лившиц*

3265. Теорема о некоторых полугруппах. Сколем (A theorem on some semi-groups. Skolem Th.), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25 72 — 77 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор признает, что теорема, о которой идет речь (о вложении полугруппы в группу), известна в литературе. *Клиффорд* (*A. H. Clifford*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 842.

3266. К теории оперативов и ассоциативов. Клейн-Бармен (Zur Theorie der Operative und Assoziative. Klein-Barmen Fritz), Math. Ann., 1953, **126**, № 1, 23—30 (нем.)

Автор называет оперативом множество с заданной в нем однозначной всюду определенной бинарной алгебраической операцией. Если эта операция ассоциативна, то оператив называется ассоциативом. Элемент x ассоциатива называется степенно-связанным, если существуют такие положительные целые числа α, δ, что $x^\alpha = x^{\alpha+\delta}$. Степенной характеристикой $\mathfrak{P}(x)$ степенно-связанного элемента x называется пара (α_0, δ_0), являющаяся наименьшим элементом в множестве всех пар (α, δ), удовлетворяющих условию $x^\alpha = x^{\alpha+\delta}$ и упорядоченных лексикографическим способом. Степенно-связанный элемент x называется глубоко связанным элементом с периодом $\omega(x) = \delta_0$, если $\mathfrak{P}(x) = (1, \delta_0)$. Степенно-связанный элемент x называется узко связанным элементом со степенной высотой $\chi(x) = \alpha_0$, если $\mathfrak{P}(x) = (\alpha_0, 1)$.

На основании этих определений доказывается ряд предложений о степенно-связанных элементах ассоциатива.

Дается пример ассоциатива, состоящего из 7 элементов, причем все они узко связанные.

В. В. Вагнер

3267. О конгруенциях алгебр. Воробьев Н. Н., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 607—608

Изучается связь конгруенций на алгебре A с подалгебрами прямого произведения алгебры A на себя: $A \times A$. Бинарное отношение φ на алгебре A, т. е. множество упорядоченных пар элементов из A, является конгруенцией алгебры A тогда и только тогда, когда φ есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на A, являющееся подалгеброй в $A \times A$. Приведен пример, показывающий, что структура B конгруенций алгебры A, являясь подмножеством в структуре C подалгебр алгебры $A \times A$, не является подструктурой в структуре C. Алгебра, подалгебра, конгруенции, прямое произведение понимаются в смысле Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 7—8). *Ю. И. Соркин*

См. также: 3218, 3225, 3271, 3305, 3385, 3445, 3449, 3468, 3479, 3480, 3481, 3482

ТОПОЛОГИЯ

3268. О непрерывных отображениях декартовых произведений. Мазур (On continuous mappings on Cartesian products. Mazur S.), Fundam. math., 1952, **39**, 229—239 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Работа содержит некоторое обобщение теоремы Улама (Ulam S., Fundam. math., 1930, **16**, 140—150) о несуществовании меры на теле всех подмножеств данного множества и доказательство следующего предложения:

Пусть A_t $(t \in T)$ — хаусдорфовы пространства со счетной базой, а B — хаусдорфово пространство, для которого диагональ $D = [(x, x) : x \in B]$ произведения $B \times B$ есть множество типа G_δ в топологии последовательностей, т. е. $B \times B \setminus D = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, где любое из F_n содержит предел каждой содержащейся в нем сходящейся последовательности. Если мощность совокупности T меньше первого недостижимого алефа, то каждое отображение f декартова произведения $A = \prod_{t \in T} A_t$ в пространство B, непрерывное по Гейне (т. е. из $x_n \to x$ следует $f(x_n) \to f(x)$), является также непрерывным в смысле Коши (т. е. $f^{-1}(U)$ открыто в A для любого открытого множества $U \subset B$). *R. Sikorski*

3269. О равномерных структурах, строго согласующихся с топологией. Судзуки (On uniformities agreeing strongly with the topology. Suzuki Jingoro), Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1953, **A4**, № 98—103, 283—289 (англ.)

Автор называет равномерной структурой (uniformity) топологического пространства R систему $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ открытых покрытий R. Он говорит, что равномерная структура строго согласуется с топологией пространства R, если $\{S(S(x, \mathfrak{A}_\alpha), \mathfrak{A}_\beta) \mid \alpha, \beta \in \Omega\}$ образует базис пространства R, где $S(A, \mathfrak{A}_\alpha)$ обозначает объединение элементов покрытия $\mathfrak{A}_\alpha$, пересекающихся с A. Исследуется связь равномерных структур и $\mathfrak{D}$-пространств Фрейденталя (Freudenthal H., Ann. Math., 1942, **43**, 261—279). $\mathfrak{D}$-пространством называется топологическое пространство R, некоторые пары открытых множеств которого находятся в отношении $\in$, удовлетворяющем следующим условиям: 1) из $O \in P$ следует $\overline{O} \subset P$; 2) из $O_1 \in P$ и $O_2 \in P$ следует $O_1 \cup O_2 \in P$; 3) из $O \in P_1$ и $O \in P_2$ следует $O \in P_1 \cap P_2$; 4) из $O \in P$ следует $(R \setminus \overline{P}) \in (R \setminus \overline{O})$; 5) из $O_1 \subset O_2$, $O_2 \in P_2$, $P_2 \subset P_1$ следует $O_1 \in P_1$.

Говорят, что $\mathfrak{D}$-пространство R $\mathfrak{D}$-регулярно, если для каждой точки $a \in R$ и любой ее окрестности U существует такая ее окрестность V, что $U \ni V$. $\mathfrak{D}$-пространство называется $\mathfrak{D}$-нормальным, если для любой пары множеств $O \in P$ существует такое Q, что $O \in Q \in P$ (понятие $\mathfrak{D}$-нормального $\mathfrak{D}$-пространства эквивалентно понятию инфинитезимального пространства (Ефремович, Мат. сб., 1952, **31 (73)**, № 1, 195); эквивалентность устанавливается при помощи следующего сопоставления обозначений: $O \in P$ равносильно $O \overline{\delta} R \setminus P$).

Каждому $\mathfrak{D}$-пространству R автор ставит в соответствие равномерную структуру, состоящую из покрытий, являющихся произведениями конечного числа бинарных покрытий вида $\{P, R \setminus \overline{O}\}$, где $O \in P$. Эта равномерная структура строго согласуется с топологией R, если R $\mathfrak{D}$-регулярно. Она является равномерной структурой в смысле А. Вейля, если R $\mathfrak{D}$-нормально.

Показывается, что расширение $\mathfrak{D}$-пространства, построенное Фрейденталем совпадает с регулярным расширением соответствующей ему равномерной структуры (определение регулярного расширения см. Morita K., Proc. Japan. Acad., 1951, 27, 65—72, 632—636).

Все эти результаты были ранее получены Ю. М. Смирновым (Мат. сб., 1952, **31(73)**, № 3, 543—574) для наиболее важного случая, а именно для инфинитезимальных пространств, т. е. $\mathfrak{D}$-нормальных $\mathfrak{D}$-пространств.

Автор показывает далее, что в снабженном компактно-открытой топологией пространстве непрерывных отображений хаусдорфова пространства A в пространство B с равномерной структурой, строго согласующейся с топологией, сходимость к пределу есть равномерная сходимость на каждом бикомпактном подмножестве пространства A. Этот результат был ранее известен для равномерных структур в смысле А. Вейля. *В. А. Ефремович, А. С. Шварц.*

3270. Гомотопические и гомологические соотношения, связанные с проблемой Шёнфлиса. Морс, Баяда (Homotopy and homology related to the Schoenflies problem. Morse Marston, Baiada Emilio), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 142—165 (англ.)

В работе изучаются свойства расположения в евклидовом пространстве E_{n+1} компактного трижды непрерывно дифференцируемого (т. е. класса C^3) многообразия M_n и замыкания IM_n конечной области, ограниченной в E_{n+1} многообразием M_n. Метод состоит в исследовании заданной на IM_n функции f, равной координате $z = x_{n+1}$ пространства E_{n+1}. Критические точки функции f на M_n подразделяются на «верхние» и «нижние», в зависимости от того, направлена ли внешняя нормаль в точке по оси z или против нее. Рассекая IM_n плоскостями $z = c_i$, отделяющими верхние критические точки от нижних, и используя специальные деформации, авторы строят модель IM_n в виде набора призм с основаниями $IM_n \cap (z = c_i)$, склеенных по некоторым подмножествам их оснований. Из приложений этой конструкции отметим следующие. Если все критические точки функции f на M_n — нижние (верхние), кроме точки абсолютного максимума (минимума) функции f, то IM_n — элемент. То же верно, если M_n имеет числа Бетти n-мерной сферы S_n, а f имеет не более четырех критических точек.

Эти результаты имеют отношение к недоказанному для $n > 2$ утверждению Шёнфлиса: если M_n — полиэдр, гомеоморфный S_n, то IM_n — элемент.

В §§ 8—9 изучаются условия, при которых можно в M_n изотопно продеформировать многообразие $\Sigma_r \subset M_n$ (Σ_r класса C^2) в подмножество окрестности $U(a)$, где a — точка относительного экстремума гладкой функции F, заданной на M_n. В доказательствах § 9 опущен ряд технических деталей. Намечены обобщения на случай риманова пространства $R_{n+1} \supset M_n$. *А. И. Фет*

3271. ∇-гомологии по модулю 2 в комплексах Эйленберга — Маклейна. Серр (Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg — MacLane. Serre J. P.), Comment. Math. Helv., 1953, 27, № 3, 198—232 (франц.)

Статья состоит из пяти параграфов. Первый — вводный. Во втором определяются алгебры $H^*(\Pi, q; Z_2)$ ∇-гомологий комплекса $K(\Pi, q)$ (РЖМат., 1954, 2907) по модулю 2 для любой абелевой группы Π с конечным числом образующих. В качестве примера приведем результат для $\Pi = Z_2$: Алгебра $H^*(Z_2, q; Z_2)$ есть алгебра многочленов от переменных вида $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_k}u$, где u есть нетривиальный элемент группы $H^q(\Pi, q)$, а числа $i_1, \ldots, i_k$ удовлетворяют соотношениям:

$$i_1 \geqslant 2i_2, \ldots, i_{k-1} \geqslant 2i_k; \quad i_1 - i_2 - \ldots - i_k < q. \tag{1}$$

Метод доказательства чисто геометрический и основан на применении к целесообразно подобранным расслоенным пространствам результатов Бореля (РЖМат, 1953, 127).

В третьем параграфе (не связанном со следующими) на основе изучения асимптотического поведения рядов Пуанкаре комплексов $K(\Pi, q)$ доказывается, что размерности нетривиальных гомотопических групп конечного полиэдра, имеющего хотя бы одну нетривиальную группу гомологий по модулю 2 в размерности, большей 0, не ограничены сверху (формулировка автора несколько более обща).

В четвертом параграфе рассматриваются общие гомологические операции. Гомологической операцией типа (q, n, A, B), где q и n — целые числа, а A и B — абелевы группы, называется отображение C: $H^q(X, A) \to H^n(X, B)$, определенное для любого симплициального комплекса X (или даже для любого пространства X) и удовлетворяющее следующему условию. Для любого непрерывного отображения f: $X \to Y$ имеет место соотношение $C \circ f^* = f^* \circ C$. Все гомологические операции данного типа, очевидно, образуют группу $C(q, n, A, B)$. Оказывается, что группа $C(q, n, A, B)$ изоморфна n-мерной группе $H^n(A, q; B)$ ∇-гомологий комплекса $K(A, q)$ над группой B. Этот изоморфизм устанавливается соответствием $C \to C(u)$, где u есть фундаментальный элемент группы $H^q(A, q; A)$. Автор замечает, что аналогичные результаты имеют место для относительных гомологий и для гомологических операций от нескольких переменных. Отсюда получается следующая аксиоматическая характеристика квадратов Стинрода. Если гомологическая операция $A^i: H^q(X, Y; Z_2) \to H^{q+i}(X, Y, Z_2)$ такова, что $A^i \circ \delta = \delta \circ A^i$, где δ есть гомоморфизм двойственности Колмогорова и, кроме того, $A^i(x) = x \smile x$, если $\dim x = i$ и $A^i(x) = 0$, если $\dim x < i$, то $A^i(x) = Sq^i x$. Комбинируя результаты второго и четвертого параграфов, автор получает, что любая гомологическая операция типа (q, u, Z_2, Z_2) однозначно представляется как многочлен от итерированных квадратов вида $Sq^{i_1} \circ \ldots \circ Sq^{i_k}$, где числа $i_1, \ldots, i_k$ удовлетворяют условиям (1). В частности, это должно иметь место для любых итерированных квадратов. Автор,

указывая, что Адем нашел все выражения такого вида, намечает хотя и не прямой, но более простой способ их вывода.

Говорят, что Y есть пространство, уничтожающее первые $q-1$ гомотопических групп пространства X, если $\pi^r(Y)=0$, для $r\leqslant q-1$ и если существует непрерывное отображение $f: Y\to X$, порождающее для любого $r\geqslant q$ изоморфизм $\pi^r(Y)\simeq\pi^r(X)$. С точностью до «слабого» гомотопического типа пространство Y единственно и обозначается через (X, q). В пятом параграфе изучаются алгебры ∇-гомологий пространств (S^3, q) для $q\leqslant 7$. Оказывается, что в размерностях $\leqslant 11$ алгебра $H^*(S^3, 4)$ обладает базой $\{1, a, Sq^1a, a\cup Sq^1a\}$, где $\dim a=4$; в размерностях $\leqslant 8$ алгебра $H^*(S^3, 5)$ обладает базой $\{1, e, Sq^1e, g, Sq^2e, Sq^2Sq^1e\}$, где $\dim e=5$, $\dim g=6$ и $Sq^1g=Sq^2e$, $Sq^2g=0$; в размерностях $\leqslant 7$ алгебра $H^*(S^3, 6)$ обладает базой $(1, j, k)$, где $\dim j=6$, $\dim k=7$, $Sq^1j=Sq^2j=0$; наконец, группа $H^7(S^3, 7)$ циклична и ее образующий элемент m удовлетворяет соотношению $Sq^1m\neq 0$. Используя эти соотношения, автор полностью вычисляет группы $\pi^{n+k}(S^n)$ для $k=3,4$. *М. М. Постников*

3272. О группах гомологий компактных аналитических многообразий с коэффициентами в некоторых аналитических пучках. Кодаира (On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux. Kodaira K.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 8, 865—868 (англ.).

В статье развивается теория гармонических форм с коэффициентами в пучках комплексных линий. Построенная теория применяется к доказательству конечномерности некоторых групп ∇-гомологий.

Пусть V — компактное комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности n, а F — пучок комплексных линий над V, т. е. аналитическое косое произведение над V, слоем которого является поле C комплексных чисел, а группой — мультипликативная группа C^* этого слоя. Пусть $\{U_j\}$ — такое открытое покрытие многообразия V, что $\pi^{-1}(U_j)=C\times U_j$ (π есть проекция пучка F). Пусть $z\in U_j\cap U_k$. Если точка $\zeta_j\times z\in C\times U_j$ совпадает с точкой $\zeta_k\times z\in C\times U_k$, то $\zeta_j=f_{jk}(z)\zeta_k$, где $f_{jk}(z)$ нигде не обращающаяся в нуль голоморфная функция от z. Система функций $\{f_{jk}\}$ называется определяющей для пучка F. Легко видеть, что в U_j существует такая положительная действительная функция a_j класса C^∞, что $|f_{jk}|^2=a_j/a_k$ в $U_j\cap U_k$. Формой типа (p, q) с коэффициентами в F называется такая система $\{\varphi_j\}$ внешних дифференциальных форм φ_j типа (p, q) (т. е. степени p по dz^α и степени q по $d\bar z^\alpha$) класса C^∞, определенных соответственно в U_j, что $\varphi_j=f_{jk}\varphi_k$ в $U_j\cap U_k$. Все такие формы образуют линейное пространство $\Gamma^{p,q}(F)$.

Введем в V произвольную положительно определенную эрмитову метрику и будем через ${}^*\varphi_j$ обозначать форму, сопряженную (adjoint) относительно этой метрики с формой φ_j. Для $\varphi\in\Gamma^{p,q}(F)$ определим $\bar\partial\varphi\in\Gamma^{p,q+1}(F)$, $\mathfrak{d}\varphi\in\Gamma^{p,q-1}(F)$, положив $(\bar\partial\varphi)_j=\bar\partial\varphi_j$, $(\mathfrak{d}\varphi)_j=-{}^*a_j\partial((1/a_j){}^*\varphi_j)$, где ∂ и $\bar\partial$ суть символы внешнего дифференцирования соответственно по переменным z^α и $\bar z^\alpha$. Относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)=\int\limits_V(1/a_j)\varphi_j\wedge{}^*\bar\psi_j$ операции ∂ и $\mathfrak{d}$ сопряжены: $(\varphi, \mathfrak{d}, \psi)=(\bar\partial\varphi, \psi)$. Оператор $\square=\mathfrak{d}\bar\partial+\bar\partial\mathfrak{d}$ называется оператором Лапласа — Бельтрами. Он самосопряжен: $(\square\varphi, \psi)=(\varphi, \square\psi)=(\bar\partial\varphi, \bar\partial\psi)+(\mathfrak{d}\varphi, \mathfrak{d}\psi)$ и является эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка. Формы $\varphi\in\Gamma^{p,q}(F)$, удовлетворяющие уравнению $\square\varphi=0$ или, что то же самое, системе уравнений $\bar\partial\varphi=\mathfrak{d}\varphi=0$, называются гармоническими формами типа (p, q). Так как эллиптический оператор на компактном многообразии имеет только конечное число линейно независимых решений, то размерность пространства $H^{p,q}(F)$ всех гармонических форм типа (p, q) конечна. Вся обычная теория гармонических форм может быть обобщена для определенных здесь гармонических форм. В частности, имеет место формула разложения

$$\Gamma^{p,q}(F)=\bar\partial\Gamma^{p,q-1}(F)+\mathfrak{d}\Gamma^{p,q+1}(F)+H^{p,q}(F).$$

Пусть $\Omega^p(F)$ — пучок (над V) источников голоморфных p-форм с коэффициентами в F и пусть $H^q(V, \Omega^p(F))$ — q-мерная группа ∇-гомологий многообразия V над $\Omega^p(F)$. Как заметил Серр, группа $H(V; \Omega^p(F))$ изоморфна группе $Z^{p,q}(F)/\bar\partial\Gamma^{p,q-1}(F)$, т. е. группе $\bar\partial$-гомологий форм типа (p, q) (здесь $Z^{p,q}(F)=\bar\partial^{-1}(0)$). Этот факт был доказан Дольбо (РЖМат, 1953, 130) для случая, когда $F=C\times V$. Отсюда и из формулы разложения следует:

$$H^q(V; \Omega^p(F))=H^{p,q}(F).$$

Таким образом, группа $H^q(V; \Omega^p(F))$ имеет конечную размерность. *М. М. Постников*

3273. Группы пучков комплексных линий над компактными многообразиями Кэлера. Кодаира, Спенсер (Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties. Kodaira K., Spencer D. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 8, 868—872 (англ.)

Эта заметка тесно связана с заметкой Кодаиры (см. реф. 3272), обозначения, введенные при реферировании которой, сохраняются и здесь.

Два пучка F и F' комплексных линий с определяющими функциями f_{jk} и f'_{jk} над многообразием Кэлера V называются аналитически эквивалентными, если на каждом U_j существует такая не обращающаяся в нуль голоморфная функция f_j, что $f'_{jk}=f_jf_k^{-1}f_{jk}$ на $U_j\cap U_k$. Аналитически эквивалентные пучки в дальнейшем не различаются. Пусть F и G — два пучка, определенные соответственно функциями f_{jk} и g_{jk}. Их суммой $F+G$ называется пучок, определенный функциями $f_{jk}g_{jk}$. Относительно определенной таким образом операции сложения совокупность $\mathfrak{F}$ всех пучков комплексных линий над многообразием V является

аддитивной группой. Нулем этой группы служит тривиальный пучок $C \times V$.

Очевидно, что для любой тройки (j, k, l) имеем: $\log f_{jk} + \log f_{kl} + \log f_{lj} = 2\pi i c_{jkl}$, где c_{jkl} — некоторые целые числа. Система этих чисел определяет на нерве покрытия $\{U_j\}$ двумерный ∇-цикл. Измельчая покрытие и переходя к пределу, мы получим двумерный целочисленный класс ∇-гомологий $c(F) \in H^2(V, Z)$ — характеристический класс пучка F. Отображение $F \to c(F)$ является гомоморфизмом группы $\mathfrak{F}$ в группу $H^2(V, Z)$. Оказывается, что класс $c \in H^2(V, Z)$ тогда и только тогда является характеристическим классом некоторого пучка, когда его гармоническая часть Hc, т. е. гармоническая форма (в обыкновенном смысле), соответствующая этому классу, рассматриваемому как класс над C, является формой типа (1,1). Обозначая подгруппу таких классов через $H^2_{(1,1)}(V, Z)$ и обозначая ядро гомоморфизма $F \to c(F)$ через $\mathfrak{P}$, мы, следовательно, получаем:

$$\mathfrak{F}/\mathfrak{P} \approx H^2_{(1,1)}(V, Z).$$

Ядро $\mathfrak{P}$ называется многообразием Пикара кэлерова многообразия V. Оказывается, что оно изоморфно некоторой фактор-группе группы $H^{(0,1)}(V)$ гармонических форм типа (0,1) и является комплексным тором размерности g, где $2g$ есть одномерное число Бетти многообразия V. *М. М. Постников*

3274. Группа классов дивизоров на алгебраических многообразиях. Кодаира, Спенсер (Divisor class groups on algebraic varieties. Kodaira K., Spencer D. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 8, 872—877 (англ.)

Реферируемая заметка является продолжением заметки тех же авторов (см. реф. 3273), и мы сохраним обозначения, принятые в указанном реферате.

Пусть V — алгебраическое многообразие без особенностей, вложенное в проективное пространство, D — некоторый дивизор и R_j — локальная мероморфная функция, определяемая дивизором D в области U_j. Положив $f_{jk} = R_j/R_k$, мы получим систему функций, определяющую некоторый пучок $\{D\}$ комплексных линий над V. Легко видеть, что соответствие $D \to \{D\}$ определяет группу классов дивизоров как подгруппу группы $\mathfrak{F}$ пучков комплексных линий. Оказывается, что эта подгруппа совпадает со всей группой $\mathfrak{F}$, т. е. любой пучок комплексных линий имеет вид $\{D\}$. Другими словами, если G — аддитивная группа всех дивизоров на V, а G_l — ее подгруппа, состоящая из дивизоров, линейно эквивалентных нулю, то

$$G/G_l = \mathfrak{F}.$$

Далее, доказывается, что

$$G_a/G_l = \mathfrak{P},$$

где G_a — подгруппа всех дивизоров, гомологичных нулю с целыми коэффициентами (см. первую теорему двойственности Игуса (Igusa J., Amer. J. Math., 1952, 74, 1—22)).

Наконец,

$$G/G_a = H^{(1,1)}_{2n-2}(V, Z),$$

где $H^{(1,1)}_{2n-2}(V, Z)$ — подгруппа $(2n-2)$-мерной целочисленной группы гомологий многообразия V, состоящая из всех классов гомологий, гармоническая часть которых имеет тип (1,1). Отсюда немедленно следует теорема Лефшеца-Ходжа: целочисленный $(2n-2)$-мерный цикл n-мерного алгебраического многообразия тогда и только тогда гомологичен дивизору (т. е. алгебраическому циклу), когда его гармоническая часть имеет тип (1,1). Что же касается группы дивизоров G_r, рационально гомологичных нулю, то имеет место следующая вторая теорема двойственности Игуса (см. предыдущую ссылку):

$$G_r/G_a = T_{2n-2}(V);$$

здесь $T_k(V)$ обозначает k-мерную группу кручения многообразия V. Иначе говоря, группа G_r/G_a двойственна группе $T_1(V)$. *М. М. Постников*

3275. Об одном классе поверхностей с циклической группой пересечений. Найт (On a class of surfaces with cyclic intersection groups. Knight A. J.), J. London Math. Soc., 1953, 28, № 110, 210—214 (англ.)

Если $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}$ образуют базис одномерной группы слабых гомологий на алгебраической поверхности F и базис $\Gamma_1, \ldots \Gamma_{2q}$ трехмерной группы слабых гомологий выбран так, что индексы пересечений удовлетворяют условию $(\gamma_i \cdot \Gamma_j) = \delta_{ij}$, то согласно Скотту (Scott D. B., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, **36**, 414—423) каждому алгебраическому двумерному циклу C на F соответствует $2q$-мерная матрица $a = (a_{ij})$, где $a_{ij} = (C \cdot \Gamma_i \cdot \Gamma_j)$.

Все матрицы a образуют модуль с конечным числом образующих.

Если размерность этого модуля равна t, то все двумерные циклы, индекс пересечения которых с любым циклом, соответствующим матрице a, равен 0, порождает t-мерный подмодуль Q в двумерной группе слабых гомологий. Если модули поверхности F общие, то $t = 1$. В этом случае Q состоит из кратных одной алгебраической кривой. Скотт предположил, что эта кривая гомологична некоторому кратному кривой фундаментальной системы поверхности F. Настоящая работа посвящена опровержению этого предположения. Противоречащий пример следующий:

Берется кривая C без особенностей степени n и рода p, матрица ω периодов абелевых интегралов которой несингулярна (это означает, что все целочисленные матрицы α, удовлетворяющие условию $\omega\alpha\omega' = 0$, кратны одной). В произведении двух экземпляров C и C' кривой C отождествляются точки (ξ, ξ') и (ξ', ξ). Получающаяся поверхность и берется за F. Показывается, что предположение Скотта может выполняться только при $p = 3$.

И. Р. Шафаревич

См. также: 3242, 3243, 3244, 3253, 3314 3445

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3276. О соприкосновении точечных множеств. Эделстейн (On contact between sets of points. Edelstein Michael), Riveon lematematika, 1953, **6**, 45—52 (иврит)

Доказана следующая теорема:

Пусть U_1, U_2, T — ограниченные области на плоскости, d — опорная линия суммы $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ такая, что пересечения $d \cap \overline{U}_1$ и $d \cap \overline{U}_2$ не пусты и содержатся в неналегающих полулиниях d, и пусть $V^a(T, \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2)$ связно. Тогда существуют, по крайней мере, два вектора такие, что определяемые ими переносы области T приводят ее к соприкосновению с обоими множествами U_1 и U_2. Здесь $V^a(T, U)$ означает множество всех точек x таких, что образ T после переноса T на вектор ax пересекает U (Edelstein M., Riveon lematematika, 1947, **1**, 91—94). Два связных, открытых множества, по определению, находятся в соприкосновении, если они не пересекаются, а их замыкания пересекаются. *Джерисон* (*M. Jerison*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 854.

3277. Об обобщенной производной. Хаслам-Джонс (On a generalized derivative. Haslam-Jones U. S.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 190—197 (англ.)

Пусть $\mathscr{B}_n$ — совокупность действительных функций ограниченной вариации $\alpha(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и таких, что

$$\int_{-1}^{1} t^r d\alpha(t) = 0 \ (r = 0,1,2,\ldots, n-1), \qquad \int_{-1}^{1} t^n d\alpha(t) = n!$$

Пусть, далее, $f(x)$ — некоторая функция, для которой при достаточно малых h существует интеграл

$$\Delta_\alpha f(x_0, h) \equiv \int_{-1}^{1} f(x_0 + ht)\, d\alpha(t).$$

Обобщенной α-производной n-го порядка в точке x_0 называется предел

$$D_\alpha f(x_0) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \Delta_\alpha f(x_0, h)$$

(если, конечно, он существует). Класс функций f, для которых существует $D_\alpha f(x_0)$, обозначается $\mathscr{D}_\alpha(x_0)$.

Ограничиваясь непрерывными функциями f, автор показывает, что существует $\omega \in \mathscr{B}_n$ такая, что $\mathscr{D}_\omega(x_0) \subset \mathscr{D}_\alpha(x_0)$, каково бы ни было $\alpha \in \mathscr{B}_n$. При этом $D_\omega f(x_0)$ совпадает с n-ой производной в смысле Пеано $T^n f(x_0)$, которая определяется из разложения

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \ldots + \frac{a_n h^n}{n!} + o\,(h^n)$$

(если такое существует): $T^{(n)} f(x_0) = a_n$. Этот результат следует из основной теоремы статьи:

Пусть $\varphi(x)$ непрерывна для $-\delta < x < \delta$ и

$$\varphi(h) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(ht)\,[P_n'(t) + P_{n-1}'(t)]\, dt = o\,(h^n),$$

где $P_n(t)$ и $P_{n-1}(t)$ суть полиномы Лежандра степеней соответственно n и $n-1$. Тогда существуют постоянные $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ такие, что $\varphi(h) = p_0 + p_1 h + \ldots + p_{n-1} h^{n-1} + o\,(h^n)$ при $h \to 0$ и, следовательно, существует $T^{(n)}\varphi(0) = 0$.

Л. Д. Кудрявцев

3278. О равномерной сходимости в некоторых классах функций. Носажевская (On uniform convergence in some classes of functions. Nosarzewska M.), Fundam. math., 1952, **39**, 38—52 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматриваются действительные функции, определенные на некотором открытом промежутке I. Последовательность функций $\{f_n\}$ точечно аппроксимирует функцию f, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует такое число N, что для $n > N$ множество $A = \mathop{\mathrm{E}}_x \{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ η-плотно в I (т. е. для любого $x \in I$ существует $x' \in A$ такое, что $|x - x'| < \eta$). Пусть Ψ_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ — класс всех функций f с положительной разностью индекса p: $\Delta^p f(x, h) \geqslant 0$ для $x \in I$, $h > 0$.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из Ψ_p, равномерно ограниченных в определенном промежутке $I_0 \subset I$. Если выполняется одно из следующих условий: а) последовательность $\{f_n\}$ точечно аппроксимирует определенную непрерывную функцию f; б) на определенном плотном подмножестве промежутка I существует $\lim f_n(x)$; в) $\{f_n\}$ асимптотически сходится на I, — то $\{f_n\}$ будет сходиться почти равномерно на I (т. е. равномерно на каждом замкнутом промежутке интервала I). В случае $p = 1$ $(p = 2)$ f_n являются монотонными (выпуклыми) функциями. Аналогичная теорема справедлива также для функций, выпуклых относительно известного класса функций Φ (см. Beckenbach E. F., Bull. Amer. Math. Soc., 1937, **43**, 363—371). *R. Sikorski*

3279. Обобщение одной теоремы Ф. Рисса. Медведев Ю. Т., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 6(58), 115—118

Доказывается, что для того чтобы функция $F(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ была представима в виде

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C, \text{ где } M(f(t)) \in L_1(a, b),$$

необходимо и достаточно, чтобы при всяком подразделении $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} M\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\right)(x_{k+1}-x_k) \leqslant K < \infty,$$

где K не зависит от точек деления x_k.

Функция $M(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ предполагается непрерывной, четной, выпуклой с $M(0)=0$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Это есть обобщение теоремы Ф. Рисса (Riesz F., Math. Ann., 1910, 69, 449—497), рассмотревшего случай $M(u) = |u|^p$ $(p>1)$. *П. Л. Ульянов*

3280. Шкала интегралов от интеграла Лебега до интеграла Данжуа. Беркилл, Геринг (A scale of integrals from Lebesgue's to Denjoy's. Burkill J. C., Gehring F. W.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 15, 210—220 (англ.)

Определяются интегрирования, промежуточные между интегрированием по Лебегу и по Данжуа в узком смысле, и изучаются некоторые свойства таких интегралов.

Определение 1. Функция f принадлежит классу $W_\alpha (0<\alpha\leqslant 1)$ на отрезке $I=[a,b]$, если

$$V_\alpha^I\{f; I\} = \sup\left\{\sum |\Delta f|^{1/\alpha}\right\}^\alpha$$

конечно, где $\Delta f = f(x_n) - f(x_{n-1})$ и суммы берутся по любым конечным разбиениям отрезка $[a,b]$.

Класс W_0 определяется как класс ограниченных функций с $V_0\{\varphi; I\}$, равным колебанию функции φ на I.

Определение 2. Функция $f \in V_\alpha (0<\alpha\leqslant 1)$ на отрезке I, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из $\left\{\sum |\Delta x|^{1/\alpha}\right\}^\alpha < \delta$ следует $\left\{\sum |\Delta f|^{1/\alpha}\right\}^\alpha < \varepsilon$, причем первая сумма берется по системам неналегающих промежутков.

Класс V_0 определяется как класс непрерывных функций. Очевидно, что V_1 является классом абсолютно непрерывных функций.

Определение 3. Функция f называется D_α-интегрируемой $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ на отрезке $[0,1]$, если она интегрируема по Данжуа—Перрону на $[0,1]$ и имеет майорантную функцию из класса W_α, причем по определению

$$(D_\alpha)\int_0^1 f(x)dx = (P)\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Очевидно, что класс D_0 совпадает с классом функций, интегрируемых по Данжуа—Перрону, а класс D_1 — с классом функций, интегрируемых по Лебегу.

Доказываются следующие основные теоремы, в которых $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, если нет оговорок:

Теорема 1. Пусть $f\in D_0$ и $F(x) = (P)\int_0^x f(t)\,dt$. Функция $f\in D_\alpha$ тогда и только тогда, когда $F\in W_\alpha$.

Теорема 2. Пусть f есть непрерывная VBG^*-функция из класса $W_\alpha(0,1)$ $(0<\alpha<1)$. Тогда $f\in V_\alpha(0,1)$.

Из теоремы 2 выводится, что класс функций $F(x) = (D_\alpha)\int_0^x f(t)\,dt$ содержится в классе V_α. Следует указать, что класс V_α, вообще говоря, не совпадает с классом функций $F(x) = (D_\alpha)\int_0^x f(t)\,dt$, например, в случае $\alpha = 0$.

Теорема 3. Если $f\in D_\alpha$ и $G\in W_\beta$, где $\alpha+\beta>1$, то $G\cdot f\in D_\alpha$.

Теорема 3′ (формулируется без доказательства). Если $G\cdot f\in D_0$ для всех $f\in D_\alpha$, то G эквивалентна функции из $W_{1-\alpha}$.

Определение 4. За расстояние между функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, принадлежащими классу $D_\alpha(0,1)$, принимают величину $\rho_\alpha(f_1-f_2) = V_\alpha\{F_1-F_2; [0,1]\}$, где

$$F_i(x) = (D_\alpha)\int_0^x f_i(t)\,dt \quad (i=1,2).$$

Теорема 4. Пусть $L(f)$ есть ограниченный линейный функционал, определенный на пространстве D_α. Тогда существует функция $G\in W_{1-\alpha}$ такая, что для каждой $f\in D_\alpha$ функция $G\cdot f\in D_0$ и

$$L(f) = (P)\int_0^1 G(x)f(x)\,dx.$$

Теорема 5. Пусть $f(x)\in D_\alpha(0,2\pi)$, тогда $a_n = o(n^{1-\alpha})$, $b_n = o(n^{1-\alpha})$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}(D_\alpha)\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(D_\alpha)\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Далее показывается, что в некотором смысле теорему 5 обобщить нельзя.

Теорема 6. Если $f(x)\in D_\alpha(0,2\pi)$ и $0<\alpha\leqslant 1$, то ряд Фурье функции $f(x)$ можно интегрировать почленно.

Следует еще указать, что в статье рассматривается вопрос суммирования рядов Фурье функций $f(x)\in D_\alpha$. *П. Л. Ульянов*

3281. Заметка об интеграле Дирихле. Митрович (Une remarque sur l'intégral de Dirichlet. Mitrović Dragiša), Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. II, 8, 44—46 (сербо-хорват.; резюме франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 980.

3282 К. Действительные функции. Гофман (Real functions. Goffman Casper, XII+263 pp., Rinehart and Co., Inc., New York, N. Y., 1953, 6.00 doll.)

Оглавление: 1. Множества и операции над ними. 2. Эквивалентность множеств. Кардинальные числа. 3. Действительные числа. 4. Теоремы о пределах. 5. Элементарные свойства множеств. 6. Канторово троичное множество. 7. Функции. 8. Последовательности функций. 9. Производная функции. 10. Порядковые типы и порядковые числа. 11. Борелевские множества и бэровские функции. 12. Применения вполне упорядочивания множеств. 13. Мера и измеримые множества. 14. Метрические свойства множеств. 15. Измеримые функции. 16. Приближение измеримых функций. 17. Интегралы Лебега и Римана. 18. Интеграл Лебега как функция множества. 19. Основная теорема интегрального исчисления. 20. Мера плоских множеств и двойное интегрирование.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 855.

3283 РЕЦ. Протяженность и мера. Майрхофер (Inhalt und Maß. Mayrhofer K., 269 S., ill., Springer, Wien, 1952) [**Рецензия:** Вьола (Viola T.), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 12, 1756—1757 (итал.)]

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3284. Об теореме Колмогорова — Селиверстова. Стечкин С. Б., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 6, 499—512

Пусть $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ и

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

— ее ряд Фурье с частными суммами S_n. Как известно, ряд (1) сходится почти всюду, если

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < \infty \qquad (2)$$

(Колмогоров А. Н., Селиверстов Г. А., C. r. Acad. sci., 1924, **178**, 303—306).

Введем обозначения:

$$\omega(\delta, f; a, b) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_a^b |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx\right\}^{1/2},$$

$$\omega_2(\delta, f; a, b) =$$

$$= \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_a^b |f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)|^2 dx\right\}^{1/2},$$

$$R_n(f; a, b) = \left\{\int_a^b |f(x) - S_{n-1}(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$[a, b] \subseteq [-\pi, \pi], \; f(x) \in L \cdot [-\pi, \pi]$$

(правые части этих трех равенств могут равняться $+\infty$). Доказываются следующие теоремы:

1. Ряд Фурье (1) сходится почти всюду на $[a, b]$, если для любого сегмента $[a', b']$, принадлежащего к открытому интервалу (a, b), $f(x) \in L^2[a', b']$ и выполняется одно из условий:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty,$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty, \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n(f; a', b')\}^2 < \infty,$$

где натуральное число N подобрано так, чтобы величины $\omega_2\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)$ и $\omega\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)$ были конечны для $n \geqslant N$.

2) При

$$f(x) \in L^2[-\pi, \pi] \text{ и } [a', b'] = [-\pi, \pi]$$

каждое из условий (3) равносильно условию (2).

Д. Е. Меньшов

3285. О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов. Ульянов П. Л., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 6(58), 133—141

Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, принадлежит классу $L^2[-\pi, \pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

А. И. Плеснер (J. reine und angew. Math., 1926, 155, 15—25) установил, что условия

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 t^{-1} dt\, dx < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ln k < \infty$$

эквивалентны. В реферируемой работе доказывается несколько предложений аналогичного характера относительно интегралов и рядов вида

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt\, dx, \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\, \omega(k). \qquad (2)$$

Приведем один из результатов.

Теорема 1. Пусть функция $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ неотрицательна, не возрастает и удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t)\, dt = \infty, \; \delta^{-2} \int_0^{\delta} t^2 \alpha(t)\, dt \leqslant C \int_{\delta}^{2\pi} \alpha(t)\, dt.$$

Тогда сходимость интеграла (1) эквивалентна сходимости ряда (2), где $\omega(k) = \int_{1/k}^{2\pi} \alpha(t)\, dt$.

Отмечается, что для быстро растущих $\omega(k)$ нужно вместо интеграла (1) рассматривать анало-

гичные интегралы, в которые входят конечные разности функции $f(x)$ более высоких порядков.

С. Б. Стечкин

3286. Обобщение теоремы Марцинкевича. **Ульянов П. Л.**, Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 6, 513—524

Пусть $f(x) \in L(0, 2\pi)$, причем $f(x) \in L^p(a', b')$ для любого $[a', b'] \subset (a, b) \subset [0, 2\pi]$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тогда имеют место теоремы:

Теорема 1. Если

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} |f(x+t) - f(x-t)|^p \, t^{-1} dt \, dx < A(\varepsilon) < +\infty \tag{1}$$

для любого ε из $\left(0, \frac{b-a}{4}\right)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на $[a, b]$.

Теорема 2. Выполнение условия (1) при $p = 2$ для любого ε из $\left(0, \frac{b-a}{4}\right)$ эквивалентно выполнению условия

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left(\int_{a''}^{b''} f(x) \cos kx \, dx \right)^2 + \left(\int_{a''}^{b''} f(x) \sin kx \right)^2 \right\} \ln k < +\infty \tag{2}$$

для почти всех точек $P(a'', b'')$, принадлежащих квадрату $[a \leqslant a'' \leqslant b, a \leqslant b'' \leqslant b]$, или, как заметил С. Б. Стечкин, для почти всех a'', b'', принадлежащих интервалу (a, b).

Теорема 1 есть обобщение теоремы Марцинкевича (Marcinkiewicz J., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1939, **8**, 239—240), а для $p = 2$ является обобщением известной теоремы Колмогорова, Селиверстова и Плеснера (Колмогоров А., Селиверстов Г., Atti Accad. naz. Lincei., 1926, **3**, 307—310; Плеснер А., J. reine und angew. Math., 1926, **155**, 15—25).

Отмечается, что условие (1) эквивалентно каждому из следующих условий:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} |f(x+t) - f(x)|^p \, t^{-1} \, dt \, dx < B(\varepsilon) < +\infty$$

или

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} |f(x-t) - f(x)|^p \, t^{-1} \, dt \, dx < C(\varepsilon) < +\infty,$$

где $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{4}$.

Доказывается также, что если

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)| \, t^{-1} \, dt \, dx < +\infty,$$

то

$$|f(x)| \ln^+ |f(x)| \in L(0, 2\pi).$$

Д. Е. Меньшов

3287. Дробное интегрирование. **Хиршман** (Fractional integration. **Hirschman I. I.**, Jr), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, 531—546 (англ.)

Пусть $u(\theta) \in L_p(0, 2\pi)$, причем

$$u(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n e^{in\theta},$$

где штрих означает, что $a_0 = 0$. Пусть далее

$$u_\alpha(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_n (in)^{-\alpha} e^{in\theta}$$

—ее дробный интеграл (в смысле Вейля) порядка α (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, § 9.8).

Положим.

$$u_\alpha(\rho, \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_n (in)^{-\alpha} \rho^{|n|} e^{in\theta};$$

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1-\rho)^{r-1-\alpha r} |u_{\alpha-1}(\rho, \theta)|^r d\rho \right]^{\frac{1}{r}p} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = \Phi(p, \alpha, r);$$

$$\int_0^{2\pi} \| u_\alpha(\theta+\tau) - u_\alpha(\theta-\tau) \|_p^s \tau^{-1-s\alpha} \, d\tau = \Psi(p, \alpha, s).$$

Имеют место следующие предложения:

1. При $1 < p < \infty$ и $0 < \alpha < 1$

$$A' \| u \|_p \leqslant \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |u_\alpha(\theta+\tau) - u_\alpha(\theta-\tau)|^2 \tau^{-2\alpha-1} \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}p} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A'' \| u \|_p,$$

где A' и A'' — постоянные, зависящие только от p и α.

2. При $1 < p < \infty$ и $-\infty < \alpha < 1$

а) $\Phi(p, \alpha, r) \leqslant A \| u \|_p$, если $2 \leqslant r < \infty$;

б) $\Phi(p, \alpha, r) \geqslant A \| u \|_p$, если $1 < r \leqslant 2$.

3. При $0 < \alpha < 1$ и $s = p$, а также при $s = 2$

а) $\Psi(p, \alpha, s) \geqslant A \| u \|_p^s$, если $1 < p \leqslant 2$;

б) $\Psi(p, \alpha, s) \leqslant A \| u \|_p^s$, если $2 \leqslant p < \infty$.

В. К. Дзядык

3288. О применении вполне и абсолютно монотонных последовательностей к проблеме моментов. **Нудельман А. А.**, Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 6(58), 119—124

Автор называет последовательность вещественных чисел $\{s_k\}_0^\infty$ вполне монотонной, если $\Delta^n s_k \geqslant 0$, и абсолютно монотонной, если $(-1)^n \Delta^n s_k \geqslant 0$, причем $\Delta^0 s_k = s_k$, $\Delta^n s_k = \Delta^{n-1} s_k - \Delta^{n-1} s_{k+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Вполне (соответственно абсолютно) монотонная последовательность называется продолжимой влево на m членов, если существуют такие положительные числа $\{s_k\}_{-m}^{-1}$, что последовательность $\{s_k\}_{-m}^\infty$ вполне (соответственно абсолютно) монотонна.

Для того чтобы последовательность $\{a_k\}_0^\infty$ допускала представление

$$a_k = \int_1^\infty t^k d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно монотонной и неограниченно продолжимой влево. Необходимое и достаточное условие определенности соответствующей проблемы моментов заключается в том, чтобы это продолжение было возможно единственным образом. Это условие эквивалентно условию $\alpha = \beta$, где

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_n^{(0)}]^2}{A_n^{(1)} A_{n-1}^{(1)}}, \quad \beta = a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[B_n^{(0)}]^2}{B_n^{(1)} B_{n-1}^{(1)}};$$

$$A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 1,$$

$$A_n^{(0)} = |a_{i+j}|_0^{n-1}, \quad A_n^{(1)} = |a_{i+j+1}|_0^{n-1};$$

$$B_n^{(0)} = |a_{i+j+1} - a_{i+j}|_0^{n-1},$$

$$B_n^{(1)} = |a_{i+j+2} - a_{i+j+1}|_0^{n-1}.$$

Множество значений чисел a_{-1} при различных продолжениях влево последовательности $\{a_k\}_0^\infty$ заполняет отрезок $[\alpha, \beta]$, и таким образом числа α и β являются предельными значениями интеграла $\int_1^\infty t^{-1} d\sigma(t)$ при заданных моментах (1).

Я. Л. Геронимус

3289. **О некоторых признаках замкнутости и полноты системы функций.** **Шилов Г. Е.**, Наукові зап. Київськ. держ. ун-та, 1953, **12**, № 6, 37—48

В классе непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций система функций $e_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется замкнутой, если не существует функция, ортогональная ко всем $e_n(t)$ и отличная от нуля. Система называется полной, если любая функция из названного класса может быть с любой степенью точности приближена линейными комбинациями функций $e_n(t)$.

Доказываются две общие теоремы о полноте и замкнутости систем функций, из которых следуют полнота и замкнутость тригонометрической системы на сегменте $[-\pi, \pi]$ и системы степеней t^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ на любом сегменте $[a, b]$:

Если для каждой точки t_0 $(a < t_0 < b)$ и каждого $\delta > 0$ такого, что $a < t_0 - 2\delta < t_0 + 2\delta < b$, среди линейных комбинаций заданной системы $\{e_n(t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно найти последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающую свойствами

(I) $\varphi_n(t) \geqslant 1$ на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$,

(II) $\varphi_n(t) \geqslant 0$ на $(t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta)$,

(III) $\varphi_n(t) \to 0$ равномерно вне интервала $(t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta)$, то заданная система замкнута на сегменте $[a, b]$.

Если последовательность $\{\varphi_n(t) = \varphi_{n\delta}(t; t_0)\}$ можно построить так, чтобы она удовлетворяла, кроме перечисленных условий, еще следующим:

(IV) $\varphi_{n\delta}(t; \bar{t}_0) = \varphi_{n\delta}(\tau; t_0)$, где $\tau = t - \bar{t}_0 + t_0$,

(V) $\varphi_{n\delta}(t; t_0) = \sum_{k=1}^{N(n)} a_{k\delta}(t_0) e_k(t)$,

где $N(n)$ не зависит от δ и t_0 и $a_{k\delta}(t_0)$ — непрерывная функция от t_0, то система $e_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полна на сегменте $[a, b]$. При этом, если $e_n(a) = e_n(b)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то полнота имеет место в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах сегмента. Если же существует такое n, при котором $e_n(a) \neq e_n(b)$, то система полна в классе всех непрерывных функций. Приводится пример замкнутой, но неполной системы.

Ф. И. Харшиладзе

3290. **Опечатки** (Errata), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 872 (англ.)

Список опечаток к статье Шапиро «Суммирование по квадрату и локализация двойных тригонометрических рядов» (РЖМат, 1953, 661).

См. также: 3470

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3291. **О полярных особых точках степенных рядов.** **Чакалов** (Върху полярните особени точки на степенните редове. Чакалов Любомир), Изв. мат. ин-т (Българ. АН), 1953, **1**, № 1, 69—82 (болг.; резюме русск.)

Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и не имеет на границе этого круга иных особых точек, кроме полюсов. Обозначим через s наибольшую из кратностей этих полюсов и предположим, что сумма соответствующих членов в главных частях разложения функции около полюсов имеет вид $\sum_{k=1}^{q} \frac{A_k}{(1 - a_k z)^s}$ $(A_k \neq 0, |a_k| = 1$, q — целое положительное).

Тогда коэффициенты c_n удовлетворяют асимптотическому равенству

$$c_n \sim \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} u_n,$$

где

$$u_n = \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n.$$

Принимая во внимание, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена, но не стремится к нулю, автор получает ряд теорем, представляющих необходимые условия, которым должны удовлетворять коэффициенты функции, не имеющей на окружности $|z|=1$ иных особенностей, кроме полюсов. Например, необходимыми будут следующие условия:

1) число $\lambda=\overline{\lim}\,\dfrac{\ln|c_n|}{\ln n}$ целое, неотрицательное;

2) $0<\overline{\lim}\,\dfrac{|c_n|}{n^{\lambda}}<\infty$.

Условия 1) — 2) не являются достаточными; автор показывает это на примере:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n\cos\ln n.$$

В. Л. Гончаров

3292. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций. Стечкин С. Б., Изв. АН СССР, сер мат., 1953, 17, № 5, 461—472

Пусть B^r $(r=1,2,\ldots)$ — класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, r-е производные которых удовлетворяют условию $|F^{(r)}(z)|\leqslant 1$ $(|z|<1)$.

Положим

$$p_n(z,F)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\quad r_n(z,F)=F(z)-p_n(z,F),$$

$$R_n(F)=\max_{|z|\leqslant 1}|r_n(z,F)|,\quad R_n[B^{(r)}]=\sup_{F\in B^{(r)}} R_n(F);$$

$$P_n(F^{(r)})=\max_{|z|\leqslant 1}|p_n(z,F^{(r)})|\quad (n=0,1,\ldots).$$

Основными результатами работы являются следующие оценки:

Теорема 2. Если $F\in B^{(r)}$, то

$$r_n(z,F)=\frac{-z^r}{(n+1)^r}\,p_{n-r}(z,F^{(r)})+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)\quad (n\geqslant r-1)$$

равномерно в круге $|z|\leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса $B^{(r)}$.

Теорема 3.

$$R_n[B^{(r)}]=\frac{1}{\pi}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)(n\geqslant r-1).$$

Формулировка этой теоремы имелась в более ранней работе автора (Усп. мат. наук, 1952, 7, № 4 (50), 139—141, теорема 7).

Приведем следствия из теоремы 2:

Следствие 1. Если $F\in B^{(r)}$, то

$$R_n(F)=\frac{1}{(n+1)^r}P_{n-r}(F^{(r)})+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)(n\geqslant r-1);$$

в частности, для того чтобы

$$R_n(F)=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)(n\geqslant r-1),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$P_n(F^{(r)})=O(1)\ (n\geqslant -1).$$

Следствие 2. Пусть $F(z)\in B^{(r)}$. Тогда для почти всех z на окружности $|z|=1$

$$r_n(z,F)=o\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^r}\right)\quad (n\to\infty).$$

Теорема 3 является аналогом известного результата А. Н. Колмогорова:

$$R_n[W^{(r)}]=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right),$$

где $W^{(r)}$ — класс непрерывных периодических с периодом 2π функций

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

имеющих непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, причем $|f^{(r)}(x)|\leqslant 1$;

$$r_n(x;f)=f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$R_n(W^{(r)})=\sup_{f\in W^{(r)}}\max_x|r_n(x;f)|.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n[W^{(r)}]}{R_n[B^{(r)}]}=\frac{4}{\pi}.$$

Относительно величины $R_n(F)$ доказываются две теоремы, аналогичные теоремам Бора и Бора — Недера для класса B (Bohr H., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl., 1917, 119—129; Neder L., Math. Z., 1921, 11, 115—123).

Приведем более общую теорему:

Теорема 5. Пусть $F(z)\in B^{(r)}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\{G_n-n^rR_n(F)\}=\infty$$

и для любой последовательности $\{l_n\}$, $l_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, найдется функция $F^*(z)\in B^{(r)}$ такая, что

$$n^r|r_n(1,F^*)|\geqslant G_n-l_n$$

для бесконечного числа значений n.

Здесь G_n — константы Ландау,

$$G_n=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(n+1)+O(1)\ (n\geqslant 1).$$

Вывод основных результатов работы базируется на ряде важных лемм о числовых рядах, а также на следующей теореме о приближении функции класса $B^{(r)}$ суммами Фейера:

Теорема 1. Обозначим через $\sigma_n(z, F)$ n-ную сумму Фейера функции $F(z)$ и положим $\rho_n(z, F) = F(z) - \sigma_n(z, F)$.

Тогда для $F(z) \in B^{(r)}$, $r = 1$, имеем неравенство

$$|\rho_n(z, F)| \leqslant \frac{3}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если же $r \geqslant 2$, то

$$\rho_n(z, F) = \frac{zF'(z)}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n = r-2, r-1, \ldots)$$

равномерно относительно z в круге $|z| \leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса $B^{(r)}$. Утверждение теоремы для случая $r = 1$ является уточнением результата Алексича (Mat. és fiz. lapok, 1941, 48, 410—422), у которого в этой оценке константа была больше трех. *С. Я. Хавинсон*

3293. О скорости приближения функций многочленами на произвольных континуумах. Мергелян С. Н., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1271—1274.

Пусть E — ограниченное, замкнутое, связное множество со связным дополнением. Рассмотрим отображение дополнения к E на внешность единичного круга ($\infty \longleftrightarrow \infty$) и обозначим через L_{1+x} прообраз окружности $|w| = 1 + x$.

Положим далее:

$d(x) = \sup_{\zeta \in \Gamma} \min_{z \in L_{1+x}} |z - \zeta|$, где Γ — граница дополнения к E;

$$\rho_n(f, E) = \min_{P_n} \max_{\zeta \in E} |f(\zeta) - P_n(\zeta)|,$$

где $P_n(\zeta)$ — многочлен степени n.

Доказана теорема:

Если $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f на E, то

$$\rho_n(f, E) < C\omega\left[d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

(C — абсолютная постоянная), причем правая часть этого неравенства ни для какого континуума не может быть заменена величиной

$$\varepsilon_n \omega\left[d\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \varepsilon_n \to 0.$$

В работу вкралась опечатка — в формуле (4) знак неравенства напечатан в обратную сторону. *М. А. Евграфов*

3294. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах. Мергелян (On the representation of functions by series of polynomials on closed sets. Mergelyan S. N.), Amer. Math. Soc. Translation № 85, 1953, 8 pp.

Перевод статьи С. Н. Мергеляна (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 3, 405—408).

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 858.

3295. О базисе (в широком смысле) пространства аналитических функций. Еремин С. А., Сб. научн. тр. Куйбышевского индустр. ин-та, 1953, № 4, 20—26

Доказывается, что система функций $\{z^n + f^{(n)}(z)\}$, $n = 0, 1, 2\ldots$, где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и

$$|a_0| + \left(1 + \frac{1}{1!}\right)|a_1| + \ldots$$

$$\ldots + \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)|a_n| + \ldots < \frac{1}{4}, \quad (1)$$

образует базис (в широком смысле) пространства E_R функций, аналитических в круге $|z| < R$, $R > 1$.

Понятие базиса (в широком смысле) ввел А. И. Маркушевич (Мат. сб., 1945, **17**(59), 211—252). Применительно к данному случаю оно означает, что для каждой функции $F(z)$, аналитической в круге $|z| < R$, $R > 1$, можно составить единственное разложение вида

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n [z^n + f^{(n)}(z)],$$

правая часть которого не может иметь подпоследовательности частных сумм, равномерно сходящейся внутри $|z| < R$ к функции, отличной от $F(z)$, т. е. либо вовсе нет равномерно сходящейся подпоследовательности, либо она непременно стремится к $F(z)$.

Доказательство ведется методом, разработанным А. И. Маркушевичем в цитированной выше статье, но при этом существенно основывается на рассмотрении бесконечной системы линейных уравнений с нормальным определителем. Нужно, чтобы он был отличен от нуля. Наложенное для этого автором ограничение (1) слишком жестко и может быть заменено, например, таким более слабым: $|a_0| + |a_1| + \ldots < 1$. *М. Г. Хапланов*

3296. Дифференциальное уравнение, интегралы которого отображают полуплоскость на полигональную область. Попова Н. В., Изв. АН Белорусск. ССР, 1953, № 5, 161—168

Статья содержит подробное изложение результатов, опубликованных ранее без доказательств (РЖМат, 1954, 2564). *П. П. Куфарев*

3297. Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации. Полжий Г. Н., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 4, 380—400

При помощи теоремы о движении граничных точек конформно отображаемых областей, установленной автором ранее (Усп. мат наук, 1952, **7**, № 6 (52), 203—205), исследуется вопрос об изменениях интегральных характеристик [расхода жидкости, выходных скоростей и противодавлений] в зависимости от всевозможных изменений произвольной области G фильтрации для плоского движения жидкости. G предполагается односвязной областью в плоскости $z = x + iy$, ограниченной кусочно-гладкой кривой L, причем замкнутая область $G + L$ может содержать и бесконечно удаленную точку. Сначала доказываются вариационные теоремы об изменениях интегральных характеристик, в зависимости от изменения области фильтрации, в следующих предположениях:

1. При отсутствии промежутка высачивания и в случаях, когда область фильтрации ограничена:

а) двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока, б) двумя потенциальными линиями и одной линией тока, в) двумя линиями тока и потенциальной линией.

2. При наличии промежутка высачивания и в случаях, когда область фильтрации ограничена: а) двумя линиями тока, двумя потенциальными линиями и промежутком высачивания, б) двумя потенциальными линиями, линией тока и промежутком высачивания, в) двумя линиями тока, потенциальной линией и промежутком высачивания.

Установленные общие вариационные теоремы теории фильтрации в сочетании с теоремой о движении граничных точек позволяют предложить довольно общий метод приближенного определения искомых интегральных характеристик. Сущность этого метода, названного автором методом мажорантных областей, состоит в том, что в каждой конкретной задаче теории фильтрации, точное решение которой в области G неизвестно, предлагается заменять решение данной задачи решением двух других задач соответственно в областях $\bar{G}$ и $\underline{G}$, для которых эти решения находятся просто и дают возможность оценить искомое значение какой-либо интегральной характеристики сверху и снизу. Метод мажорантных областей применяется к решению следующих задач о фильтрации жидкости под гидротехническими сооружениями:

1. Определение расхода жидкости под плоским флютбетом при произвольном количестве шпунтов.

2. Определение выходных скоростей при фильтрации под плоским флютбетом с тремя симметрично расположенными шпунтами в грунте бесконечной глубины.

3. Определение расхода жидкости при фильтрации без подпора из некольматированного канала произвольного сечения, подстилаемого высокопроницаемым горизонтальным ложем.

Погрешность искомых величин в 1-й задаче не превосходит 16,4%, во 2-й — 12,92% и в 3-й — 10,5%. *Г. С. Салехов*

3298. Некоторые приложения конформных отображений близких областей с неподвижными точками на границе в теории фильтрации. Шаманский В. Е., Украинский мат. ж., 1953, **5**, № 4, 401—412

Основываясь на известных результатах М. А. Лаврентьева, автор исследует вопрос об отображении друг на друга близких областей, оставляющем неподвижными три точки на границе.

Определяется главная часть функции $g(w)$, конформно отображающей $|w|<1$ на близкую к кругу область, ограниченную кривой Γ, имеющей непрерывную и близкую к единице кривизну, при требовании, что три точки $e^{\pm im}$, $e^{i\alpha}$, принадлежащие Γ, неподвижны при отображении; находится также главная часть модуля граничной производной. Затем получаются аналогичные формулы для функции, отображающей полуполосу на область, близкую к полуполосе. Последние формулы автор, следуя М. А. Лаврентьеву (Конформные отображения, Гостехиздат, М.—Л., 1946) и Г. Н. Положему (Усп. мат. наук, 1952, **7**, № 6(52), 203—205), применяет для получения некоторых качественных выводов об изменении характеристик бесконечно глубокого фильтрационного потока под непроницаемым гидротехническим сооружением при изменении границ потока (влияние шпунта и изменения его положения, изменения дна верхнего или нижнего бьефа). *П. П. Куфарев*

3299. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций (добавление). Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1279—1280

Автор в своей предыдущей работе (Изв. АН СССР, сер. мат., 1942, **6**, 115) исследовал расположение по полуплоскостям нулей целых функций вида

$$F(z)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}a_{kl}z^k e^{lz}.$$

Было доказано, что при $a_{mn}=0$ $F(z)$ имеет бесконечное число нулей и слева и справа от мнимой оси, а при $a_{mn}\neq 0$ имеет место обобщенная теорема Эрмита — Билера, состоящая в следующем:

Пусть вдоль мнимой оси $F(iy)=h(y)+ig(y)$, тогда необходимое и достаточное условие того, что все корни $F(z)$ лежат слева от мнимой оси, состоит в том, что все корни функций $h(y)$ и $g(y)$ вещественны и выражение $g'(y)h(y)-h'(y)g(y)$ строго положительно вдоль оси y (отсюда вытекает перемежаемость корней функций $h(y)$ и $g(y)$).

В реферируемой заметке эти результаты переносятся на функции вида $\frac{F(z)}{P(z)}$, где $P(z)$ — полином, если эти функции не имеют полюсов. Заметим, что другими авторами был точно определен класс целых функций, для которых справедлива обобщенная теорема Эрмита — Билера, и, в частности, были рассмотрены квазиполиномы с произвольными частотами l (Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1949, **26**, особенно стр. 239). *Н. Н. Мейман*

3300. Тауберова теорема для типа целой функции. Лакшминарасимхан (A tauberian theorem for the type of an entire function. Lakhsminarasimhan T. V.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 2, 55—58 (англ.)

Доказана теорема:

Пусть $\varphi(x)>0$ непрерывна и $\varphi(x)\sim c/x$ при $x\to\infty$, а $f(x)$ при $x>x_0$ не убывает. Положим

$$\psi(x)=\exp\int_0^x\varphi(t)\,dt,\quad g(x)=\int_0^x f(t)\varphi(t)\,dt,$$

$$A=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f(x)}{\psi(x)},\quad a=\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f(x)}{\psi(x)}.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{g(x)}{\psi(x)}\geqslant Ae^{-(A-a)/A},$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{g(x)}{\psi(x)}\leqslant a+a\ln(A/a).$$

Эта теорема является обобщением одного результата Бака (Buck R. C., J. Indian Math. Soc., 1952, **16**, 147—149). Как и Бак, автор применяет эту теорему к оценкам типа целых функций, имеющих заданное распределение нулей. Он получает результат:

Если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)}{r^{\rho}}=L,\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)}{r^{\rho}}=l,$$

то

$$Le^{-(L-l),L}\leqslant\rho\tau,$$

где ρ, τ — соответственно порядок и тип функции.
М. А. Евграфов

3301. Функциональное уравнение для ζ-функции Вейерштрасса. Карлиц (A functional equation for the Weierstrass ζ-function. Carlitz L.), Math. Student, 1953, 21, № 1—2, 43—45 (англ.)

Доказаны теоремы:

1. Любое решение функционального уравнения

$$[f(u+v)-f(u)-f(v)]^2=-f'(u+v)-f'(u)-f'(v),$$

не имеющее в конечной части плоскости никаких особых точек, кроме полюсов, имеет вид: $f(u)=-\frac{b^2u}{3}+b$ или $f(u)=\zeta(u; g_2, g_3)$.

Здесь b, g_2, g_3 — произвольные постоянные.

2. Любое решение функционального уравнения

$$-\frac{d}{du}\frac{f'(u)}{f(u)}+\frac{d}{dv}\frac{f'(v)}{f(v)}=\frac{f(u+v)f(u-v)}{f^2(u)f^2(v)},$$

не имеющее в конечной части плоскости никаких особых точек, кроме полюсов, имеет вид

$$f(u)=Ae^{Bu^2}\sigma(u; g_2, g_3).$$

Здесь A, B, g_2, g_3 — произвольные постоянные.
М. А. Евграфов

3302. Пространство H^p, $0<p<1$, не нормируемо. Ливингстон (The space H^p, $0<p<1$, is not normable. Livingston Arthur E.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 613—616 (англ.)

Пусть H^p означает множество аналитических в единичном круге функций $x(z)$, для которых

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}|x(re^{i\theta})|^p d\theta<+\infty.$$

Если положить

$$\|x\|=\sup_{0\leqslant r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

и ввести понятие открытого множества: $U\subset H^p$ открыто, если для любого $x_0\in U$ найдется такое r, что все $x\in H^p$, для которых $\|x-x_0\|<r$, принадлежат U, то H^p становится линейным топологическим пространством. В работе доказывается, что при $0<p<1$ это пространство не является нормируемым. Доказательство опирается на теорему А. Н. Колмогорова о необходимом и достаточном условии нормируемости линейного топологического пространства.
С. Я. Хавинсон

3303. *FK*-пространства в теории функций. II. Целлер (*FK*-Räume in der Funktionentheorie. II. Zeller Karl), Math. Z., 1953, 58, № 4, 414—435 (нем.)

При помощи введения различных, но эквивалентных полунорм изучаются свойства *FK*-пространства $\mathfrak{R}$ (РЖМат, 1954, 2246) элементов $a=(a_k)$ таких, что $a(z)=\sum_k a_k z^k$, $|z|<1$. Даются примеры подпространств из $\mathfrak{R}$, не являющихся *B*-пространствами. В терминах слабой сходимости в пространстве $\mathfrak{R}$ получается критерий равномерной сходимости внутри круга $|z|<1$ последовательности функций $a^{(n)}(z)$, обобщающий известные критерии Витали, Хинчина и др. Показывается, что множество элементов пространства $\mathfrak{R}$, аналитически продолжаемых за пределы круга $|z|<1$, имеет первую категорию в $\mathfrak{R}$. Приводится обобщение этой теоремы для некоторых подмножеств пространства $\mathfrak{R}$, а также и для любой области G. Исследуются граничные значения функции $a(z)$ ($a\in\mathfrak{R}$), — например, доказываются теоремы:

11.5. Пусть G — замкнутое (или открытое) множество на окружности $|\zeta|=1$. Тогда найдется $a\in\mathfrak{R}$ такое, что для $\zeta\in C$ существует $\lim_{\rho\to1-0}a(\rho\zeta)$, а для остальных ζ этот предел не существует.

12. 3. Найдется $a\in\mathfrak{R}$ такое, что $\sup_{|z|<1}|a(z)|<\infty$ и для всех ζ существует предел $\lim_{\rho\to1-0}a(\rho\zeta)=a(\zeta)$ при $|\zeta|=1$, причем $a(\zeta)$ не является непрерывной функцией ни на какой дуге окружности $|\zeta|=1$.

13. 3. Пусть $\mathfrak{R}_S$ — подпространство пространства $\mathfrak{R}$, состоящее из равномерно непрерывных функций

$$a(z)=\sum_k a_k z^k,\quad \text{и}\quad \Gamma_n=\frac{1}{\pi}\ln(n+1)+O(1).$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=o(\Gamma_n)$$

для каждого $a\in\mathfrak{R}_S$, но для любой нуль-последовательности ε_n существует $a\in\mathfrak{R}_S$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\neq O(\varepsilon_n\Gamma_n).$$

Рассматривается также *B*-подпространство $\mathfrak{P}_G$ тех $a\in\mathfrak{R}$, для которых $\sum_k a_k z^k$ равномерно сходится для $|z|\leqslant1$; при этом нормой в $\mathfrak{P}_G$ является

$$\|a\|=\sup_{n=0,1,\ldots}\sup_{|z|<1}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k z^k\right|.$$

Доказывается, что если

$$\Lambda_n=\sup_{\|a\|\leqslant1}\sum_{k=0}^{n}|a_k|,\ a\in\mathfrak{P}_G,$$

то

$$\Lambda_n\leqslant\sqrt{n+1}\ \text{и}\ \inf_{n=0,1,\ldots}\frac{\Lambda_n}{\sqrt{n+1}}>0$$

Далее, если $\sup_{|z|<1} |a(z)| < \infty$, то

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = o(\sqrt{n+1}),$$

но для любой нуль-последовательности ε_n существует $a \in \mathfrak{P}_G$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \neq O(\varepsilon_n \sqrt{n+1}).$$

Исследуются также суммы вида $\sum_k |a_k|^p$.

Метод доказательства указанных предложений состоит в применении общей теории FK-пространств, развитой в первой части статьи. *Л. Д. Кудрявцев*

3304. О теоремах Альфорса о накрывающих поверхностях. **Цудзи** (On Ahlfors' theorems on covering surfaces. Tsuji Masatsugu), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, 1953, **6**, 319—328 (англ.)

Содержатся модификации оригинального доказательства (Acta Math., 1935, **65**, 157—194).

Альфорс (*L. V. Ahlfors*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 969.

3305. О норме регулярного функционального столбца. **Пешль, Эрве** (Über die Norm regulärer Funktionenspalten. Peschl Ernst, Erwe Friedhelm), Arch. Math., 1953, **4**, № 3, 191—201 (нем.)

Исследуются свойства «n-членного регулярного функционального столбца», т. е. матрицы вида

$$\mathfrak{f}(z) \equiv \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(z) \end{pmatrix},$$

где функции $f_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ регулярные (голоморфные) в некоторой однолистной области G плоскости комплексного переменного $z = x + iy$; случай многозначных аналитических функций $f_\nu(z)$ (без особых точек в многосвязной области G) не исключается. Называя $\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(z)|^2$ нормой такого «столбца» и полагая для всякой функции $g(x, y)$

$$\frac{\partial g}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right);$$

$$g^{(j,k)} \equiv \frac{\partial^{j+k} g}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}; \quad g^{(0,0)} \equiv g;$$

$$\gamma_r\{g\} \equiv \begin{vmatrix} g^{(0,0)} & g^{(0,1)} & \ldots & g^{(0,r)} \\ g^{(1,0)} & g^{(1,1)} & \ldots & g^{(1,r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ g^{(r,0)} & g^{(r,1)} & & g^{(r,r)} \end{vmatrix}$$

(элементы этого определителя всегда предполагаются непрерывными функциями точки рассматриваемой области), авторы доказывают, что для всякой вещественнозначной функции $F(z)$ точки области G и для всякого натурального числа n условия:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_r\{F(z)\} > 0 \ (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \\ \gamma_n\{F(z)\} = 0 \end{array}\right\} \text{для всех } z \in G$$

необходимы, а для односвязной области G и достаточны для того, чтобы $F(z)$ была нормой n-членного регулярного функционального столбца в области G, для элементов $f_\nu(z)$ которого определитель Вронского отличен от нуля везде в этой области. Из других свойств нормы регулярного функционального столбца, доказанных авторами, отметим следующее (аналогичное известному свойству модуля аналитической функции комплексного переменного): если $\mathfrak{f}(z)$ и $\mathfrak{g}(z)$ — два n-членных регулярных функциональных столбца в области G, нормы которых совпадают в некоторой окрестности какой-нибудь точки $z_0 \in G$, то да найдется такая унитарная матрица A с постоянными элементами, что в области G имеем $\mathfrak{f}(z) = A\mathfrak{g}(z)$. *В. С. Федоров*

3306. Тауберовы теоремы для кратных рядов Дирихле и кратных интегралов Лапласа. **Делаж** (Théorèmes Taubériens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace. Delange Hubert), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1953, сер. 3, **70**, № 1, 51—103 (франц.)

Для кратных рядов Дирихле даются аналоги следующих трех известных тауберовых теорем относительно двойного ряда Тейлора

$$f(x, y) = \sum_{m \geqslant 1,\ n \geqslant 1} a_{m,n} x^m y^n$$

(эти теоремы для краткости объединяем в одну): Пусть

$$S_{m,n} = \sum_{i \leqslant m,\ j \leqslant n} a_{ij}, \quad p_{m,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}, \quad q_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,n}$$

и $f(x, y) \to S$ при $x \to 1, y \to 1$ $(0 < x < 1, 0 < y < 1)$. Тогда $S_{m,n} \to S$ при $m, n \to \infty$ в каждом из следующих случаев: 1) $mp_{m,n}$ и $nq_{m,n}$ ограничены и стремятся к 0 при $m, n \to \infty$ (это, в частности, имеет место, если $(m^2 + n^2)\, a_{m,n}$ ограничено и стремится к 0 при $m, n \to \infty$); 2) $(m^2 + n^2)\,|a_{m,n}| \leqslant M$ и $|f(x, y)| \leqslant M_1$ $(0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1)$; 3) $a_{m,n}$ — действительны, $|f(x, y)| \leqslant M_1$ $(0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1)$ и $mp_{m,n} > -K$, $nq_{m,n} > -K$. Подобно тому, как тауберовы теоремы для ряда Дирихле $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ получаются в качестве следствий из теорем для интегралов Лапласа, результаты для кратных рядов Дирихле получаются в качестве следствий из результатов для кратных интегралов Лапласа. Ради простоты изложения исследования проводятся для случая двух переменных, причем по методу они аналогичны предыдущим исследованиям автора (Ann. Math., 1949, **50**, 99—109; Ann. scient. Ecole norm. supér. 1950, сер. 3, **67**, № 3, 199—242).

Пусть $s(u, v)$ — функция (действительная или комплексная), определенная при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и суммируемая в любом прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant A$, $0 \leqslant v \leqslant B$. Положим $W(u, v, \lambda, \mu) = \sup |s(u', v') - s(u, v)|$ $(u < u' < \lambda u, \quad v < v' < \mu v, \quad \lambda > 1, \mu > 1)$, $\overline{w}(\lambda, \mu) = \sup_{u, v > 0} W(u, v, \lambda, \mu)$, $w(\lambda, \mu) = \overline{\lim_{u, v \to \infty}} W(u, v, \lambda, \mu)$. Утверждается, что если $\overline{w}(\lambda, \mu) < +\infty$, то интеграл

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty xye^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv$$

существует при $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$ и при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеет место (основная в работе) формула

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta) =$$

$$= x^2 y^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} \sum_{\alpha, \beta} (u, v)\, du\, dv,$$

где

$$\sum_{\alpha, \beta}' (u, v) = \begin{cases} 0, \text{ если } u = 0, \text{ или } v = 0, \\ \int_0^u \int_0^v S_{\alpha, \beta}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \text{ если } u > 0, \quad v > 0, \end{cases}$$

причем $S_{\alpha, \beta}(u, v) = s(\alpha u, \beta v) - s(\alpha, \beta)$.

На основании этой формулы доказывается теорема: если $\overline{w}(\lambda, \mu) < +\infty$ и $\Phi(x, y) \to S$ при $x \to 0$, $y \to 0$ $(x > 0, y > 0)$, то

$$\overline{\lim_{u, v \to \infty}} |s(u, v) - S| \leqslant w(1 + 0, 1 + 0). \qquad (1)$$

Другие теоремы относительно $\Phi(x, y)$ аналогичны.

Далее рассматриваются двойные интегралы Лапласа — Стилтьеса. Пусть $s(u, v)$ — прежняя функция. Говорят, что она ограниченной вариации в прямоугольнике $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$, если, каковы бы ни были числа $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_m = b$ и $c = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = d$, сумма

$$\sum_{i, j} |s(u_{i+1}, v_{j+1}) - s(u_i, v_{j+1}) - s(u_{i+1}, v_j) + s(u_i, v_j)|$$

является ограниченной. Под интегралом Лапласа — Стилтьеса $\int_a^b \int_c f(u, v)\, ds(u, v)$ понимается предел суммы

$$\sum_{i, j} f(\xi_i, \eta_j) [s(u_{i+1}, v_{j+1}) - s(u_i, v_{j+1}) - s(u_{i+1}, v_j) + s(u_i, v_j)]$$

$(u_i \leqslant \xi_i \leqslant u_{i+1}, v_j \leqslant \eta_j \leqslant v_{j+1})$ при $\max(u_{i+1} - u_i, v_{j+1} - v_j) \to 0$.

Пусть $s(u, v)$ ограниченной вариации в любом прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant A$, $0 \leqslant v \leqslant B$ и $s(0, v) = 0$ при $v \geqslant 0$, $s(u, 0) = 0$ при $u \geqslant 0$. Показывается, что если $\overline{w}(\lambda, \mu) < +\infty$, то при $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} ds(u, v) = \Phi(x, y) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty xye^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv.$$

Отсюда, в силу предыдущей теоремы, получаем: если $\overline{w}(\lambda, \mu) < +\infty$ и $\Phi_1(x, y) \to S$ при $x \to 0$, $y \to 0$, то имеет место соотношение (1). Другие теоремы относительно $\Phi_1(x, y)$ аналогичны теоремам для $\Phi(x, y)$.

Затем рассматриваются двойные ряды Дирихле

$$F(x, y) = \sum_{m, n} a_{m, n} e^{-\lambda_m x} e^{-\mu_n y},$$

где

$$\lambda_m \uparrow \infty, \quad \mu_n \uparrow \infty.$$

Вводится функция $s(u, v)$, равная 0 при $u = 0$ и при $v = 0$ и равная (при $u > 0$, $v > 0$) сумме тех $a_{m, n}$, у которых индексы m и n таковы, что $\lambda_m \leqslant u$, $\mu_n \leqslant v$. Она ограниченной вариации и

$$\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy} ds(u, v) =$$

$$= \sum_{\lambda_m \leqslant U,\ \mu_n \leqslant V} a_{m, n} e^{-\lambda_m x} e^{-\mu_n y}.$$

В силу этого равенства тауберовым теоремам для $\Phi_1(x, y)$ будут соответствовать тауберовы теоремы для $F(x, y)$. Используя вышеуказанную теорему для $\Phi_1(x, y)$, автор получает следующий результат:

Пусть имеется такая постоянная K, что

$$|p_{m, n}| < K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}$$

для $\lambda_m > 0$, $n \geqslant 0$ и

$$|q_{m, n}| < K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}$$

при $\mu_n > 0$, $m \geqslant 0$.

Если $F(x, y) \to S$ при $x \to 0$, $y \to 0$, то ряд $\sum_{m, n} a_{m, n}$ сходится и его сумма равна S (для доказательства этой теоремы показывается, что $\overline{w}(\lambda, \mu) < +\infty$ и что в соотношении (1) $w(1 + 0, 1 + 0) = 0$).

Отметим еще один результат:

Пусть $a_{m, n}$ действительны и имеется такая постоянная $K > 0$, что

$$p_{m, n} \geqslant -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \quad (\lambda_m > 0, n \geqslant 0),$$

$$q_{m, n} \geqslant -K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \quad (\mu_n > 0, m \geqslant 0).$$

Если ряд, определяющий $F(x, y)$, сходится для $x>0$, $y>0$, причем $F(x, y)$ ограничена для $x>0$, $y>0$ и стремится к S при $x\to 0$, $y\to 0$, то тогда частные суммы $S_{m,n}$ ограничены и

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} S_{m,n}=S,\quad \underline{\lim_{m,n\to\infty}} S_{m,n}\geqslant S-K(2-\alpha-\beta),$$

где

$$\alpha=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}},\quad \beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}.$$

Другие результаты аналогичны. *А. Ф. Леонтьев*

3307. О четырехмерных римановых поверхностях многозначных функций двух комплексных переменных. Хирцебрух (Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Hirzebruch Friedrich), Math. Ann., 1953, **126**, № 1, 1—22 (нем.)

Пусть M — комплексное многообразие в пространстве z_1, z_2;

$$\pi=(w-w_0)^r+a_1(w-w_0)^{r-1}+\ldots+a_r$$

— неприводимый псевдополином с вершиной в точке P (a_i — регулярные функции от z_1, z_2, исчезающие в P); $w_1, \ldots, w_r$ — функции (ветви), определяемые уравнением $\pi=0$, и g — регулярная в P функция $\not\equiv 0$. π и g определяют в P алгеброидный функциональный элемент A_P с ветвями $w_1/g, \ldots, w_r/g$, а всевозможные аналитические продолжения A_P в M определяют там функцию f, называемую автором алгеброидной. Элементы A_P могут быть рассматриваемы как точки хаусдорфова пространства, накрывающего многообразие M или его часть. Это пространство автор называет римановой областью (Bereich) B функции f. Она вообще содержит неуниформизируемые точки ветвления [пусть ψ — отображение накрывающей B в M; точка (алгеброидный элемент A_P) $\in B$ называется униформизируемой, если существуют окрестность U ($A_P\in U\subset B$), окрестность $\tilde{U}$ точки $(0, 0)$ пространства (t_1, t_2) и такое топологическое отображение $\varkappa\tilde{U}$ на U, что $\psi\varkappa$ есть аналитическое отображение $\tilde{U}$ на $\psi(U)$; для $r=1$ A_P всегда униформизируема, но, например, точки $A_{n,q}$, определяемые псевдополиномами w^n-z_1, z_2^{n-q} ($1\leqslant q<n$; q, n — без общих делителей), не униформизируемы].

Комплексное многообразие $\tilde{M}$ называется римановым многообразием функции f, если существует такое непрерывное его отображение t на B, что 1) ψt есть аналитическое отображение $\tilde{M}$ на $\psi(B)$; 2) функция $\tilde{f}=ft$ (если $Q\in\tilde{M}$ и $t(Q)=A_P\in B$, то $f(Q)=f(A_P)=w_0/g(P)$) в $\tilde{M}$ мероморфна и не имеет точек неопределенности; 3) если B^* — комплексное многообразие, получаемое из B удалением неуниформизируемых ее точек и точек неопределенности f, то для каждой точки $Q\in B, Q\notin B^*$ прообраз $t^{-1}(Q)$ в $\tilde{M}$ состоит из конечного числа компактных неприводимых аналитических поверхностей S_Q, погруженных в $\tilde{M}$; 4) t взаимно однозначно и аналитически отображает $\tilde{M}-\{S_Q\}$ на $M-P$ ($\{S_Q\}$ — совокупность всех S_Q).

Переход от B к $\tilde{M}$ (если $\tilde{M}$ существует) включается в так называемую модификацию римановых областей (Gebiete) на замкнутых их подмножествах (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1951, **121**, 1—16) и, как было показано Хопфом (Hopf H., Rend. math. e appl., 1951, cep. V, **10**, 169—182), для изолированных точек состоит в их замене подходящими σ-деревьями [по Хопфу замена точки P сферой σ_P (комплексной плоскостью) состоит в образовании многообразия $M_P=(M-P)\cup\sigma_P$ и построении для него (доказывается возможность) такого аналитического отображения t_P на M, что $M_P-\sigma_P$ соответствует взаимно однозначно $M-P$, σ_P переходит в P и для окрестности σ_P в M_P с координатами z_1', z_2' и соответствующей окрестности P в M с координатами z_1, z_2, $P=(0, 0)$, отображение t_P представляет бирациональное преобразование $z_1=z_1'$, $z_2=z_1'z_2'$ (σ_P характеризуется уравнением $z_1'=0$; каждой фиксированной ее точке $(0, z_2')$ можно поставить в соответствие бесконечно удаленную точку комплексной прямой $z_2/z_1=z_2'$, так что замена P на σ_P означает ее замену комплексной проективной прямой (=комплексной плоскости) ее линейных элементов). Повторяя такую замену для $P_1\in\sigma_P$ и т. д. конечное число раз, приходим к замене P σ-деревом (Einsetzen eines Sphärenbaumes]. В работе доказывается, что всякая алгеброидная функция обладает римановой поверхностью. *Л. И. Волковыский*

3308. Гиперкомплексные функции n измерений от гиперкомплексного переменного p измерений. Фреше (Les fonctions hypercomplexes à n dimensions d'une variable hypercomplexe à p dimensions. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 18, 1053—1055 (франц.)

Введенные автором ранее парааналитические функции (РЖМат, 1953, 214, 710, 1173) обобщаются на тот случай, когда размерность n функции может не совпадать с размерностью p независимого переменного. Особо выделено предположение: $n=3$, $p=2$.

Доказательства, как и в предшествующих заметках, предполагается изложить в подробном мемуаре автора. *В. Л. Гончаров*

3309 К. Функции тока и их применение к некоторым вопросам конформного отображения. Болдер (Flow functions and their application to some problems of conformal mapping. Bolder Harm), Thesis, University of Leiden, 1953, 38pp. (англ.)

Доказательство существования конформного отображения односвязной области на прямоугольник, опирающееся непосредственно на принцип Дирихле, получено уточнением теоремы Алфорса об искажении. *Гарабедян (P. R. Garabedian)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 861.

3310 К. Начальный курс теории функций комплексного переменного. Каплан (A first course in functions of a complex variable. Kaplan Wilfred, VII+485—619 pp., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1953, 3. 50 doll.) (англ.)

Перепечатка главы 9 книги по математическому анализу (см. реф. 3362).

Из Math. Rev., 1953. **14**, № 10, 959.

См. также: 3195 РЕЦ, 3303, 3341, 3370, 3437, 3471

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3311. О специальной системе совместных дифференциальных уравнений. Якобшталь (Über ein spezielles System simultaner Differentialgleichungen. Jacobsthal Ernst), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, **25**, 78—81 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Эта заметка касается системы дифференциальных уравнений

$$f(x)\,y_k' = \varphi_k(x) + \sum_{\lambda=1}^{n} a_{k\lambda} y_\lambda \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где $a_{k\lambda}$ — постоянные, а функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ обладают производными порядка $n-1$. Неизвестное y_k удовлетворяет дифференциальному уравнению $L_k(y_k) = \theta_k(x)$ порядка n, которое может быть найдено процессом исключения. Здесь автор показывает, что дифференциальные операторы $L_1, \ldots, L_n$ фактически одинаковы.

Мак-Колл (L. A. MacColl)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 874.

3312. О приближенных решениях линейных дифференциальных уравнений. Джефрис (On approximate solutions of linear differential equations. Jeffreys Harold), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 601—611 (англ.)

Изучается асимптотическое решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (h^2\chi_0 + h\chi_1 + \chi_2)\,y, \qquad (1)$$

где χ_i $(i = 0, 1, 2)$ — данные функции независимого переменного x; параметр h достаточно большой. Это уравнение имеет отношение к изучению Грином (Green G., Trans. Cambridge Philos. Soc., 1837, **6**, 457—462) распространения длинных волн в канале переменного сечения (в задаче Грина h обозначает скорость вибрации).

В предположении, что в рассматриваемой области $|\chi_0|$ имеет положительную нижнюю границу, дифференциальное уравнение (1) преобразовывается к виду

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} - h^2 z = g(\xi, h)\,z, \qquad (2)$$

где h вещественно и положительно. Новая независимая переменная определяется единственным образом в некоторой области D, в которой функция $g(\xi, h)$ предполагается аналитической. При некоторых условиях уравнение (2) имеет два решения Z_1 и Z_2, аналитических в D и таких, что в определенной области $E \subseteq D$

$$Z_1 = e^{h\xi}\left[1 + O\left(\frac{1}{h}\right)\right], \qquad Z_2 = e^{-h\xi}\left[1 + O\left(\frac{1}{h}\right)\right]$$

равномерно по отношению к ξ.

Если χ_0 имеет простой нуль, то уравнение (1) сводится с некоторой погрешностью к уравнению Эйри

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = h^2\xi z,$$

решения которого известны (в некоторой области):

$$z_1(\xi) = \mathrm{Bi}(h^{2/3}\xi) \qquad z_2(\xi) = \mathrm{Ai}(h^{2/3}\xi).$$

Введенные функции удовлетворяют ряду тождеств и табулированы для вещественного переменного, причем на комплексной плоскости известно их поведение. Используя функции $\mathrm{Ai}(\xi)$ и $\mathrm{Bi}(\xi)$ при различных значениях аргумента ξ, автор получает асимптотические решения рассматриваемого уравнения.

К. Я. Латышева

3313. Теория магнитных влияний на шум в германиевой нити. Сал (Theory of magnetic effects on the noise in a germanium filament. Suhl Harry), Bell. System Techn. J., 1953, **32**, № 3, 647—664 (англ.)

Дается решение двух простых обыкновенных дифференциальных уравнений.

3314. Характеристики векторного поля двумерной сферы. Милнор (The characteristics of a vector field on the two-sphere. Milnor John), Ann. Math., 1953, **58**, № 2, 253—257 (англ.)

Пусть R — область двумерной сферы, ограниченная конечным числом дифференцируемых кривых. На R задано достаточно регулярное векторное поле, характеристики которого обладают свойством единственности всюду, за исключением, быть может, конечного числа критических точек типа простых узлов, фокусов или седел, причем граница области R есть линия без контакта. Далее строятся замкнутые характеристические полигоны, под которыми понимаются или замкнутые характеристики (число последних предполагается конечным), или последовательность надлежащим образом ориентированных характеристик, общие точки которых являются седлами. Особый элемент поля: или а) критическая точка, или б) граничная кривая, или в) замкнутый характеристический полигон, вместе с выбранной стороной. Особый элемент называется источником, если он неустойчив, и стоком, если он устойчив.

Пусть s — особый элемент и $\varepsilon(s) = 1$, если s — источник; $\varepsilon(s) = -1$, если s — сток; $\varepsilon(s) = 0$ во всех остальных случаях. Обозначим через $\alpha(s)$

число характеристик, входящих или выходящих из седел (сепаратрис или асимптот, по терминологии автора; для каждого седла их имеется четыре) и начинающихся или кончающихся на s (возможно, в результате неограниченного наматывания!). Используя классические результаты Пуанкаре (О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., Гостехиздат, 1947) и Бендиксона (Bendixson I., Acta. Math., 1901, 24, 1—88; неполный русский перевод см. Усп. мат. наук, 1941, 9, 191—211), автор доказывает справедливость формул:

$$\sum_{\alpha(s)=0} \varepsilon(s) = 0$$

и

$$\sum_{s} \varepsilon(s)\,\alpha(s) = 0,$$

где первая сумма распространена лишь на те особые элементы s, для которых $\alpha(s) = 0$, а вторая сумма — на все особые элементы векторного поля.

Б. П. Демидович

3315. Об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений. Бурдина В. И., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 603—606

Рассматривается система двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и следом нуль:

$$\frac{dx}{dt} = IH(t)\,x, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$H(t+\omega) = H(t)$ — симметричная матрица второго порядка; x — вектор.

Пусть φ_x — угол поворота вектора x за время ω; $\Psi_1 = \min \varphi_x$, $\Psi_2 = \max \varphi_x$ по всем решениям x. Как известно, справедлива оценка

$$\int_0^\omega h_{\min}\,dt \leqslant \Psi_1 \leqslant \Psi_2 \leqslant \int_0^\omega h_{\max}\,dt, \tag{2}$$

где $h_{\min}$, $h_{\max}$ — минимальное и максимальное собственные числа матрицы $H(t)$.

Замена $y = \begin{pmatrix} e^{\delta} & e^{\delta}\alpha \\ 0 & e^{-\delta} \end{pmatrix} x$ (α, δ — дифференцируемые функции, $\alpha(0) = \alpha(\omega) = 0$, $\delta(0) = \delta(\omega) = 0$), не меняя чисел Ψ_1 и Ψ_2, переводит систему (1) в систему того же вида, но с другой матрицей $H(t)$.

Доказывается (доказательство приведено не полностью), что

$$\Psi_1 = \max \int_0^\omega h_{\min}\,dt, \quad \Psi_2 = \min \int_0^\omega h_{\max}\,dt$$

по всем функциям α, δ указанного вида. Используя выражения для $\Psi_{1,2}$ через характеристический показатель системы (1), полученные автором ранее, и беря произвольные α, δ указанного вида, из неравенств (2) можно получить оценки характеристического показателя, т. е. оценки порядка роста решений x при $t \to \infty$. Приводится критерий:

Пусть $p(t) \geqslant 0$ — дифференцируемая периодическая функция периода ω, имеющая на $[0, \omega]$ конечное число точек максимума $(i_1, \ldots, i_s)$ и точек минимума $(j_1, \ldots, j_s)$. Если для некоторого $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$k\pi \leqslant \int_0^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau - \frac{1}{4}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)},$$

$$\int_0^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau + \frac{1}{4}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)} \leqslant (k+1)\pi,$$

то все решения уравнения $y'' + p(t)\,y = 0$ ограничены при $t \to \infty$.

В. А. Якубович

3316. Природа решений уравнения вынужденных колебаний типа Релея с большим коэффициентом затухания. Брок (The nature of solutions of a Rayleigh-type forced vibration equation with a large coefficient of damping. Brock Paul), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 8, 1004—1007 (англ.)

Излагается содержание докторской диссертации автора (Нью-Йоркский университет, 1950 г.), доложенной на Международном съезде математиков в сентябре 1950 г. Большинство результатов дается без доказательств.

Изучаются периодические решения уравнения

$$\ddot{y} + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\dot{y}^3 - \dot{y}\right) + y = A\cos\omega t \tag{1}$$

при больших ε, причем A имеет порядок ε и $\omega = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Аналогичные вопросы, когда ω не зависит от ε, рассматриваются, например, в сборнике «Contributions to the theory of nonlinear oscillations» (Princeton University, Princeton, 1950). Заметим также, что существование, по крайней мере, одного периодического решения уравнения (1) вытекает из работы Левинсона (Levinson N., J. Math. and Phys., 1943, 22, 41).

Функция $^1/_3\,\dot{y}^3 - \dot{y}$, фигурирующая в уравнении (1), аппроксимируется кусочно-линейной функцией $a_i\dot{y} + b_i$ с изломами при $\dot{y} = \pm 1$, а уравнение (1) соответственно сводится (замена $y = \varepsilon\xi$) к уравнению

$$\ddot{\xi} + a_i\dot{\xi} + \xi = \frac{A}{\varepsilon}\cos\omega t - b_i. \tag{2}$$

Отбрасыванием членов высшего порядка по отношению к $1/\varepsilon$ получены уравнения, связывающие начальные условия периодического решения частоты ω (а также ω/n) и параметры уравнения (2). В плоскости (ξ, v), $v = \dot{y} = \varepsilon\dot{\xi}$, указана кольцеобразная область, в которой расположены кривые, соответствующие периодическим решениям уравнения (2) с частотой ω. Рассматривается геометрически на плоскости (ξ, v) ход периодического решения и соседних интегральных кривых.

При помощи счетной машины PEAK (REAC — Reeves Electronic Analogue Computer) получено количественное подтверждение результатов работы.

А. В. Драгилев

3317. Об асинхронном гашении. Минорский (Sur l'extinction asynchrone. Minorsky Nicolas), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 13, 643—645 (франц.)

Рассматриваются периодические решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - (a - cx^2)\dot{x} + x = \gamma \sin \omega t, \qquad (1)$$

где a, c, γ и ω — малые положительные числа одинакового порядка малости. Методом, который автор назвал в предыдущих публикациях стробоскопическим (C. r. Acad sci., 1950, **231**, 1417; 1951, **232**, 2179; 1952, **234**, 292), задача приближенного определения периодических решений системы (1) сводится к определению особых точек системы

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sigma(r^3 - pr + q), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{gR}{r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \dot{x}$ и φ — искомые амплитуда и фаза, а σ, p, q, g и R выражаются через a, c, γ и ω. Условия локальной устойчивости этих особых точек сводятся к неравенствам

$$\sigma(3r_0^2 - p) + s(\omega) > 0; \quad \sigma(3r_0^2 - p)\, s(\omega) > 0,$$

где $\sigma > 0, (3r_0^2 - p) > 0$; а $s(\omega)$ — функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\omega \to \infty} s(\omega) = 0$.

Таким образом значение $\omega = \infty$ является для указанных особых точек бифуркационным, соответствующим превращению устойчивого узла в седло. Автор предполагает, что это объясняет явление асинхронного гашения, состоящее в гашении автоколебаний при действии на систему внешнего периодического воздействия большой частоты, не имеющей целочисленных соотношений с частотой автоколебаний. *М. А. Айзерман*

3318. О дифференциальных уравнениях движения спутников планет. Дубошин Г. Н., Астроном. ж., 1953, **30**, № 3, 315—331

В классических руководствах по небесной механике дифференциальные уравнения планетоцентрического движения спутников больших планет обычно приводятся в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} + f\frac{(M_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} =$$

$$= -f\mathbf{P}(\mathbf{r}_i) + fM_s\left(\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i}{\Delta_i^3} - \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k}{}' fm_j\left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right), \qquad (1)$$

где m_i, M_0, M_s — массы спутника, соответствующей планеты и Солнца, r_i, r_s — векторы, определяющие планетоцентрические положения спутника и Солнца, Δ_i, r_{ij} — расстояния от Солнца до спутника и расстояния между двумя спутниками, $\mathbf{P}$ — член, зависящий от формы поверхности и распределения плотности внутри планеты.

Автор предлагает строгий вывод дифференциальных уравнений движения спутников, удерживая в окончательных выражениях несколько членов, добавочных по сравнению с правыми частями классических уравнений (1). В этом выводе планета рассматривается как материальное тело, каждый элемент массы которого взаимодействует по закону Ньютона со спутниками, Солнцем и другими планетами, которые считаются материальными точками.

Действия этих точек на планету приводятся в инерциальной системе координат к результирующей силе, приложенной в центре инерции планеты, и к результирующей паре, вращательным действием которой затем пренебрегают. Отбрасывая члены, пропорциональные массам спутников, и члены, зависящие от формы планеты, автор прежде всего получает уравнения гелиоцентрического движения планет, тождественные с классическими.

Что касается спутников, то в статье предлагается ввести некоторые поправочные члены к классическим уравнениям. *Г. А. Мерман*

3319. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$. Волк В. Я., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 4 (56), 141—151

Доказывается следующая теорема:

Ограниченное в нуле решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения

$$y'' + \left[\lambda - q(x) - \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)x^{-2}\right]y = 0,$$

$$0 \leqslant x < \infty,$$

где $q(x)$ — непрерывная функция, представимо в виде

$$\varphi(x, \lambda) = x^{1/2}\lambda^{1/4}J_p(x\lambda^{1/2}) +$$

$$+ \int_0^x K(x, t)\, t^{1/2}\lambda^{1/4}J_p(t\lambda^{1/2})\, dt,$$

где $K(x, t)$ — непрерывная функция; J_p — цилиндрическая функция порядка p. Метод доказательства такой же, как в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, **15**, 309—360) для случая $p = 1/2$.

Автор замечает, что доказанная теорема позволяет решать обратные задачи спектрального анализа для соответствующих краевых задач. Аналогичные результаты имеются в работе В. В. Сташевской (Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 409—411). *В. А. Марченко*

3320. О спектральной функции уравнения $y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0$. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 5, 473—484

Пусть $\theta(x, y, \lambda)$ $(\theta^*(x, y, \lambda))$ — спектральная функция дифференциального оператора $l[u] = u'' - q(x)u$ $(l^*[u] = u'')$, заданного на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ или на всей оси $-\infty < x < \infty$ (РЖМат, 1953, 724).

Положим при $\mu > 0$

$$\Phi(x, y; \mu) = \theta(x, y, \mu^2) - \theta^*(x, y, \mu^2).$$

Доказывается, что при любом фиксированном $\mu_0 > 0$, при x, y, меняющихся в любой фиксированной конечной области, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{a \to \infty} \{\Phi(x, y; a + \mu_0) - \Phi(x, y; a)\} = 0$$

равномерно относительно x и y. *В. А. Марченко*

3321. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, 17, № 4, 331—364

Даются подробные доказательства теорем, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1953, 734).

В. А. Марченко

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3322. О некоторых теоремах, относящихся к выпуклости в среднем одного класса субгармонических функций. Дингас (Sur quelques théorèmes concernant la convexite des moyennes d'une classe des fonctions sousharmoniques. Dinghas Alexandre), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 14, 594—595 (франц.)

Обозначим через (L) класс действительных и однозначных функций $u=u(P)$ точки $P=P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ евклидова полупространства $H^n = E(x_1 > 0)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\overline{\lim\limits_{P\to Q}}\, u(P) \leqslant 0 \quad [Q \in E(x_1 = 0)]$.

2. В окрестности любой точки множества $E = E(u \geqslant 0)$ функция $u(P)$ дважды дифференцируема, причем в каждой точке подмножества $E_1 = E(u > 0)$ выполняется неравенство

$$\Delta u \geqslant cu,$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, а c — некоторая непрерывная и неотрицательная функция в H^n.

3. Множество E_1 не пусто.

Рассмотрим полусферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2\ (x_1 > 0)$; положим

$$E_r = E \cap S_r, \quad x_1 = r\cos\varphi, \quad \psi(P) = u^+(P)/\cos\varphi.$$

Введем также функцию

$$m_k(r) = \left\{ \int\limits_{E_r} \psi^{2k}(P)\cos^2\varphi\, d\omega_n \right\}^{1/k} \quad (k \geqslant 1),$$

где $d\omega_n$ обозначает элемент поверхности единичной сферы $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$.

Приводятся без доказательства следующие теоремы:

Теорема 1. Для всех функций класса (L) выражение $m_k(r)\, r^{n-2}$ представляет собой при каждом значении k выпуклую функцию от r^n. В частности, выражение $m_k^{1/2}(r)/r$ есть положительная и неубывающая функция от r.

Теорема 2. Выражения $m_k^{1/2}(r)/r$ представляют собой выпуклые функции от $1/r^n$.

Теорема 3. Функция $M_1^2(r) r^{n-2}$, где $M_1(r) = \max \psi(P)$ на S_r, есть выпуклая функция от r^n. В частности, отношение $M_1(r)/r$ есть положительная и неубывающая функция от r.

А. И. Каландия

3323. О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя. Гейронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 6, 1257—1260

Пусть L — гладкая, замкнутая или разомкнутая, спрямляемая кривая длины l такая, что угол θ, составляемый касательной к ней с постоянным направлением, удовлетворяет условию Дини — Липшица

$$|\theta(s_2) - \theta(s_1)| \leqslant A\,|\lg|s_2 - s_1||^{-1-\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

причем s — дуговая абсцисса точки кривой L. Функцию $\mu(s)$, характеризующую распределение массы на кривой L, будем считать удовлетворяющей условию Липшица

$$|\mu(s_2) - \mu(s_1)| \leqslant B\,|s_2 - s_1|.$$

Предположим, кроме того, что для двух элементарных отрезков e_1 и e_2 кривой L равной длины Δs $e_1 = [\alpha, \alpha + \Delta s]$, $e_2 = [\beta, \beta + \Delta s]$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{e_1} d\mu(s) - \int\limits_{e_2} d\mu(s) \right| \leqslant C\Delta s\,|\lg|\alpha - \beta||^{-1-\nu}, \quad \nu > 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(y)$, обладающую следующими свойствами: 1) она определена и имеет ограниченную первую производную при $y \geqslant \lg 1/R$, где R — наибольшая хорда кривой L; 2) она монотонно стремится к $+\infty$ вместе с y; 3) при $y \geqslant N$, где N — сколь угодно большая положительная величина, существует вторая производная $\varphi''(y)$. Пример такой функции дает $\varphi(y) = y^k$ $(y > 0,\ 0 < k \leqslant 1)$.

При сделанных предположениях устанавливается равенство

$$\frac{d}{d\sigma}\int\limits_0^l \varphi\left(\lg\frac{1}{r}\right) d\mu(s) = \int\limits_0^l \frac{d\varphi\left(\lg\frac{1}{r}\right)}{d\sigma}\, d\mu(s), \quad 0 < \sigma < l, \quad (1)$$

где r обозначает расстояние между двумя точками кривой L, соответствующими дуговым абсциссам s и σ; интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши.

Отметим, что при более стеснительных условиях относительно $\varphi(y)$, $\mu(s)$ и $\theta(s)$ справедливость формулы (1) была установлена раньше (напр., Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.— Л., 1946, 34—37).

А. И. Каландия

3324. О возрастании некоторого класса субгармонических функций, ограниченных на заданном многообразии. Дингас (Sur la croissance de certaines classes de fonctions sousharmoniques bornées sur des multiplicités données. Dinghas Alexandre), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 14, 690—691 (франц.)

Будем говорить, что действительная и однозначная функция $u = u(P)$ точки $P(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства R_n принадлежит классу (C_m), если выполняются следующие условия:

1. В окрестности каждой точки множества $E_0 = E(u \geqslant 0)$ функция $u(P)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, причем в любой точке множества $E_1 = E(u > 0)$ имеет место

неравенство $\Delta u \geqslant cu$, где Δ — оператор Лапласа, а c — некоторая непрерывная неотрицательная функция.

2. Множество E не пустое, состоит, по крайней мере, из m областей $E_1, E_2, \ldots$, не имеющих попарно общих внутренних точек, и простирается в бесконечность.

В работе оценивается порядок функций u при помощи некоторой возрастающей функции от m.

Обозначим через S_r сферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$, положим

$$M(r) = \max\{u(P)\} \quad (P \in E_0 \cap S_r)$$

и введем монотонную и убывающую функцию

$$\sigma(l) = \sin^{n-2} l \left[\int_0^l \sin^{n-2}\alpha\, d\alpha\right]^{-1} = \tau'(l)/\tau(l) \quad (0 \leqslant l \leqslant \pi).$$

Положим

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \{\log M(r) : \log r\},$$

$$c_0 = \underline{\lim_{r\to\infty}}\, c(P)\, r^{\rho} \quad (P \in S_r).$$

Приводится (без доказательства) следующая теорема:

Если $u \in (C_m)$ и l_0 определяется из уравнения

$$\sigma^2(l_0) = \rho(\rho + n - 2) - c_0,$$

то

$$m \leqslant A(n)/\tau(l_0),$$

причем $A(n)$ зависит исключительно от u.

Кроме того, приводится без доказательства оценка

$$\rho \geqslant D(m),$$

где $D(x)$ — некоторая положительная и возрастающая функция своего аргумента. *А. И. Каландия*

3325. Применение метода Пиконе к дифференциальному уравнению теплопроводности. Салаи (Anwendung des Picone-Verfahrens auf die Wärmeleitungs-Differentialgleichung. Szalay L. v), Elektrotechn. Z., Ausg. A. 1953, **74**, № 5, 141—143 (нем.)

Показана схема применения метода Пиконе (см., например, Monatsh. Math., 1950, 54, 189) к решению обычной смешанной неоднородной задачи для уравнения теплопроводности.

Пусть для уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} - w(r, t) \quad (r = (x, y, z))$$

в пространстве $(r \in \tau,\ 0 \leqslant t < \infty)$ краевые условия имеют вид $u|_{t=0} = \varphi(r)$, $u|_{r\in\sigma} = f(r, t)$ (σ — граница τ). Решение ищется в виде

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, v_k(r),$$

где $\Delta v_k = -\gamma_k^2 v_k$, $v_k|_{r\in\sigma} = 0$, причем все v_k попарно ортогональны в τ. Тогда преобразование $\int (v_k \Delta u - u\Delta v_k)\, d\tau$ по известной формуле Грина приводит к уравнениям

$$\dot{A}_k(t) + a\gamma_k^2 A_k(t) = \frac{a}{c_k}\left(\int_{(\sigma)} f\frac{\partial v_k}{\partial n}\, d\sigma + \int_{(\tau)} w v_k\, d\tau\right)$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots;\ c_k = \int_{(\tau)} v_k^2\, d\tau\right),$$

откуда определяются $A_k(t)$ ($A_k(0)$ находятся из начальных условий). Аналогично рассматриваются граничные условия второго и третьего вида. В качестве примера разобран случай нагревания прямоугольной пластинки (плоская задача) двумя точечными тепловыми импульсами; приведены графики, показывающие процесс установления температуры. Имеются опечатки. *А. Д. Мышкис*

3326. Подвижные критические точки нелинейного волнового уравнения. Тиц (Movable critical points of a nonlinear wave equation. Tietz T.), Phys. Rev., 1953, сер. 2, **90**, № 3, 495 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\Box\varphi - k^2\varphi - \eta\varphi^3 = 0$$

в одномерном случае ($\Box = \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$).

Для отыскания решений, инвариантных относительно преобразований Лоренца, вводится переменная $s = t^2 - x^2$. При $\eta \neq 0$, полагая $\varphi = \sqrt{8s/|\eta|}\, f(s)$, получим уравнение

$$f'' = -\frac{2f'}{s} \pm 2f^3 - \frac{(1 + k^2 s) f}{4s^2},$$

где знак перед $2f^3$ противоположен знаку η. Это уравнение всегда имеет подвижные критические точки. *И. М. Соболь*

3327. О спектральных свойствах оператора $-\Delta u + cu$ в неограниченном пространстве произвольного числа измерений. Зюзько М. П., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 6, 957—959

Обобщаются на случай n-мерного пространства E_n $(n > 3)$ теоремы А. Я. Повзнера (РЖМат, 1953, 263) по спектральной теории оператора $Bu = -\Delta u + c(p)\, u$. Пусть B обозначает последний оператор, заданный на всех «гладких» функциях, обращающихся в нуль вне некоторого компакта из E_n. Сформулированы следующие теоремы (доказательства которых намечены):

1. Резольвента R_λ любого самосопряженного расширения A оператора B есть интегральный оператор с ядром $H(p, q; \lambda)$, имеющим в точке $p = q$ особенность не выше $(n-2)$-го порядка и

$$\int_{E_n - \omega_\varepsilon} |H(p, q; \lambda)|^2\, dq < \infty,$$

где ω_ε — сфера с центром в точке p и радиуса ε. Если $c(p)$ один раз непрерывно дифференцируема, то $-\Delta H + c(p) H = \lambda H$, причем оператор Δ применяется по p.

2. Разложение единицы $\mathcal{E}_t$ порождается некоторой спектральной функцией $\vartheta(p, q; \mu)$, т. е.

$$(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) f = \int_{E_n} [\vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha)]\, f(q)\, dq.$$

3. Существуют такая функция $\psi(p, q; \mu)$ и такая неубывающая функция $\tau(\mu)$, что

$$\vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(p, q; \mu)\, d\tau(\mu).$$

При доказательстве этих предложений существенную роль играет лемма, утверждающая, что ядро $\mathcal{K}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})$ интегрального оператора $R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}}$, где λ_i — любые комплексные точки верхней (нижней) полуплоскости, при $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ есть непрерывная функция относительно p и q и $\mathcal{K} \in L^2$ по каждому из переменных p, q.

М. И. Вишик

3328. К теории общих краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 2, 205—208

Рассматривается в ограниченной области Ω с границей Γ эллиптический самосопряженный оператор

$$\mathcal{L}g = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) + cg, \qquad (1)$$

$c(x) \geqslant 0$. Пусть S — замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора $\mathcal{L}g$, рассматриваемого на дважды непрерывно дифференцируемых функциях в Ω, обращающихся в нуль вблизи Γ; S^* — сопряженный с S оператор.

1. Доказано, что S^* является замыканием оператора $\mathcal{L}$, рассматриваемого на всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях в $\Omega + \Gamma$. Пусть U ($\subset L_2(\Omega)$) — подпространство всех обобщенных решений уравнения

$$\mathcal{L}u = 0. \qquad (2)$$

Показано, что множество всех дважды непрерывно дифференцируемых внутри Ω и непрерывно дифференцируемых в $\Omega + \Gamma$ решений уравнения (2) всюду плотно в U.

2. Дается следующая характеристика жесткого расширения S_μ, введенного М. Г. Крейном (Мат. сб., 1947, 20 (62), № 3, [431]), оператора S: $D(S_\mu)$ состоит из всех функций $g \in L_2^{(1)}(\Omega) \cap D(S^*)$, которые обращаются в нуль на Γ ($L_2^{(1)}(\Omega)$ — класс функций, имеющих обобщенные первые производные, принадлежащие $L_2(\Omega)$). Приводится также характеристика области $D[S_\mu]$.

3. Для описания расширений оператора S вводятся основные граничные операторы γ_1, γ_2 (Вишик М. И., Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, 1, 187). Области изменения этих операторов составляют некоторые пространства H_1 и H_2 функций, заданных на границе Γ, причем $H_1 \supset L_p(\Gamma)$ при $p \geqslant \frac{2(n-1)}{n}$, а $H_2 \subset L_q(\Gamma)$ при $q \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2}$. Автор показывает, что эти соотношения справедливы и без ограничений на функцию Грина, которые налагал референт при их выводе (см. предыдущую ссылку).

4. Любое самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S, имеющее ограниченный обратный оператор, характеризуется граничным условием

$$\gamma_1 g = \widetilde{B}\gamma_2 g, \qquad (3)$$

где $\widetilde{B} = \gamma_1 B (\gamma_2 S_\mu^{-1})^{-1}$, B — самосопряженный оператор в U (см. цитированную работу референта). Это граничное условие эквивалентно двум условиям:

$$P_{W_1}\gamma_1 g = 0, \qquad (4)$$

$$\widetilde{B}^{-1}\gamma_1 g = P_{V_2}\gamma_2 g, \qquad (5)$$

где P_{W_1} и P_{V_2} — операторы проектирования на определенные пространства; $\gamma_1(g) \in D(\widetilde{B}^{-1})$. Условие (5) называется естественным граничным условием, а условие (4) — главным граничным условием. Такое разложение граничных условий удобно для характеристики множества $D[\widetilde{S}]$, если $\widetilde{S}$ — полуограниченный оператор.

М. И. Вишик

3329. Об обращении параболического дифференциального оператора $\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial t$. Хартман, Винтнер (On the inverse of the parabolic differential operator $\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial t$. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 598—610 (англ.)

Рассматриваются вопросы дифференцируемости непрерывных решений уравнений

$$\partial u = f \quad (\partial u \equiv u_{xx} - u_y); \qquad (1)$$

$$\partial^* u = f \left(\partial^* u = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y) - [u(x, y) - u(x, y-h^2)]\}\right), \qquad (1^*)$$

причем функция f предполагается непрерывной. Приведем основные результаты, содержащиеся в статье.

Разность двух непрерывных решений уравнения (1), соответственно (1*), является бесконечно дифференцируемой функцией. Это позволяет рассматривать только одно определенное решение уравнений (1), (1*) — интеграл Пуассона.

Для уравнения (1) приводится пример непрерывной правой части, при которой уравнение (1) не имеет непрерывных решений (решение понимается здесь в обычном смысле, т. е. требуется существование производных u_y, u_{xx} и выполнение (1)). С другой стороны, уравнение (1*) имеет непрерывное решение при любой непрерывной правой части.

Дается сводка свойств интеграла Пуассона $u(x, y)$, причем f предполагается произвольной непрерывной функцией. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для существования производных u_y, u_{xx}, приводится одно достаточное условие для непрерывности этих производных.

Многие из приводимых в статье фактов уже известны или легко следуют из известных результатов.

Л. А. Чудов

3330. Ряды с кратными полюсами в теории поверхностных волн. Торн (Multipole expansions in the theory of surface waves. Thorne R. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, ч. 4, 707—716 (англ.)

Решены некоторые частные граничные задачи теории потенциала для полуплоскости ($y>0$), полупространства ($z>0$) и бесконечного (плоского и пространственного) слоя, которые встречаются в теории волновых движений жидкости в каналах со свободной поверхностью.

В случае плоского движения при помощи интегралов по промежутку $(0, \infty)$ от известных функций построены в полуплоскости $y>0$ (в слое $0\leqslant y\leqslant h$) гармонические функции переменных x, y, удовлетворяющие при $y=0$ условию: $K\Phi+\Phi_y=0$ (в случае слоя также $\Phi_y=0$ при $y=h$), обладающие в точке $(0, f)$ особенностями вида $\log r\cos\sigma t$, $r^{-n}\cos n\theta\cos\sigma t$, $r^{-n}\sin n\theta\cos\sigma t$ и имеющие на бесконечности ($x\to\pm\infty$) характер распространяющейся синусоидальной волны $A\sin K(x-at)$. Аналогичные построения проведены для полупространства $z>0$ и слоя $0\leqslant z\leqslant h$, когда искомые гармонические функции переменных x, y, z имеют в точке $(0, 0, f)$ особенности вида

$$r^{-n-1}P_{nm}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\cos\sigma t.$$

И. Н. Векуа

3331. О точных решениях одного класса гиперболических уравнений, имеющего приложения в теории гидравлического удара. Волков Д. М., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 1, 49—50

Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=B(\xi+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{1}$$

ищется в виде характеристической волны

$$u(\xi,\eta)=\sum_{\nu=0}^{N}g_\nu(\xi+\eta)\frac{d^\nu\varphi(\xi)}{d\xi^\nu}$$

с произвольной достаточно гладкой $\varphi(\xi)$. Для этого нужно, чтобы

$$g'_{\nu+1}(\bar{x})-2B(\bar{x})g'_{\nu+1}(\bar{x})=B(\bar{x})g_\nu(\bar{x})-g'_\nu(\bar{x})$$
$$(\nu=-1,\ 0,\ \ldots,\ N;\ \bar{x}=\xi+\eta;$$
$$g_{-1}(\bar{x})\equiv g_{N+1}(\bar{x})\equiv 0).$$

Условие совместности последней системы уравнений представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение для $B(\bar{x})$, содержащее параметры. Это условие, в общем виде в работе не изучаемое, дает новые случаи интегрируемости в конечном виде известного в гидродинамике уравнения Дарбу и ранее найденные классы решений $B(\bar{x})$ (Волков Д. М., Гинзбург И. П., Вестн. Ленингр. гос. ун-та, 1952, № 6, 29; Гриб А. А., Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 1, 43; Валландер С. В., Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 5, 637). При произвольном $B(\bar{x})$ решение можно искать в виде суммы бесконечного ряда аналогичного вида; сходимость этого ряда должен обеспечить выбор $\varphi(\xi)$. *А. Д. Мышкис*

3332. Замкнутое решение волнового уравнения для ограниченной среды. Алексеева О. П., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 4, 501—505

При помощи операторного метода автор получает известные следствия из представления интегралом Лапласа решения предельной задачи для уравнения колебания струны.

Все вопросы, затронутые в работе, рассмотрены в учебниках (см., например, Гильберт Д., Курант Р., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.-Л., 202—247). *О. А. Ладыженская*

3333. К вопросу о концентрации напряжений возле отверстий в цилиндрической оболочке. Шевляков Ю. А., Науч. зап. Днепропетровского гос. ун-та.; Сб. работ физ.-мат. фак., 1953, **41**, 79—91

Изучается влияние малого отверстия на распределение напряжений в цилиндрической пологой оболочке. Задача о концентрации напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной круговым отверстием, рассматривалась А. И. Лурье (Лурье А. И., Статика тонкостенных оболочек, Гостехиздат, 1947), который применением разложения искомого решения по некоторому малому параметру дал способ приближенного решения задачи. В работе дается также приближенное решение задачи. Используется разложение искомого решения по малому параметру, а затем применяется аппарат теории функций комплексного переменного.

Оси координат на срединной поверхности оболочки обозначим через x, y; x направлена по образующей, а y — по направляющему кругу. Пусть T_1, T_2, S — нормальные и касательное усилия, G_1, G_2, H — изгибающие и крутящий моменты, N_1, N_2 — перерезывающие силы, u, v, w — компоненты перемещения точек срединной поверхности.

Тогда задача об определении влияния отверстия на распределение напряжений в оболочке приводит к следующей граничной задаче (для определенности предполагаем, что контур отверстия свободен):

Найти регулярное вне отверстия решение $F(x, y), w(x, y)$ системы дифференциальных уравнений

$$\nabla^4 F+\frac{Eh}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$
$$\nabla^4 w-\frac{1}{DR}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

с граничными условиями на контуре отверстия

$$T_{nx}=f_1(s),\ T_{ny}=f(s), \tag{2}$$

$$G_n=m(s),\ N_n+\frac{\partial H_{nt}}{\partial s}=h(s). \tag{3}$$

Здесь E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, R — радиус кривизны сечения срединной поверхности по оси y, ∇^4 — бигармонический оператор; T_{nx}, T_{ny}, G_n, N_n, H_{nt} — усилия и моменты по наклонным площадкам, выражающиеся через $T_1, T_2, \ldots, N_2$; $f_1(s), \ldots, h(s)$ — заданные функции дуги s. Как известно, все искомые величины — T_1, T_2, $\ldots$, N_2, u, v, w — выражаются через функции F и w.

Считая отношение $h/R=\xi$ малым, автор ищет решение системы (1) в виде:

$$F=F_0+\xi F_1+\xi^2F_2+\ldots$$
$$w=w_0+\xi w_1+\xi^2w_2+\ldots$$

Подставляя эти выражения в (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ,

находим

$$\nabla^4 F_0 = 0,\ \Delta^4 w_0 = 0,$$

$$\nabla^4 F_1 = -E\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},\ \Delta^4 w_1 = A\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2},$$

$$\nabla^4 F_2 = -E\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},\ \Delta^4 w_2 = A\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2},\ A = \frac{1}{Dh}.$$

Функции $F_0, F_1, \ldots,$ и $w_0, w_1, \ldots$ получаются последовательно, как решения некоторых задач об изгибе тонкой упругой пластинки с заделанными (в соответствии с условиями (2)) и свободными (в соответствии с условиями (3)) краями. Эти задачи решаются методом Н. И. Мусхелишвили. Аналогично решается задача в случае, когда отверстие укреплено раструбком или кольцом жесткости. Вопрос сходимости приближенных решений к точному в работе не затрагивается. *А. И. Каландия*

3334. Равновесие упругой полой сферы. Лурье А. И., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 3, 311—332

Рассматривается задача об определении вектора смещения в любой точке упругого тела, ограниченного двумя концентрическими поверхностями в двух случаях: 1) заданы смещения на сферических поверхностях, 2) заданы внешние нагрузки на сферических поверхностях.

Как указывает автор, Вильям Томсон (Thomson W., Tait P., Treatise on Natural Philosophy, 1, часть II, Cambridge, 1883) решает обе задачи, исходя из представления решения однородных уравнений упругости через 3 гармонические функции, разыскивая последние в форме рядов по гармоническим полиномам.

Разлагая заданные на сферических поверхностях величины в ряды по сферическим функциям, автор исходит из решения П. Ф. Папковича, содержащего 4 гармонические функции.

$$\mathbf{u} = \frac{4(m-1)}{m}\mathbf{B} - \operatorname{grad}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}) - \operatorname{grad} B^0,$$

где $\boldsymbol{B}$ — гармонический вектор, B^0 — гармоническая функция, $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор точки.

Даны окончательные формулы, определяющие вектор $\boldsymbol{u}$ через коэффициенты разложения заданных величин по сферическим функциям. Затем рассматриваются некоторые частные задачи в случае заданных внешних нагрузок (равновесие сплошной сферы, бесконечной области со сферической полостью, случай сосредоточенных сил). *М. Г. Слободянский*

3335. Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки. Агабабян Е. Х., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 3, 325—332

Рассматриваются радиальные колебания $U(r, t)$ бесконечной круглой толстостенной трубы $a \leqslant r \leqslant b$ в упругопластической области под действием внезапно приложенного внутреннего давления P, а также импульса давления.

В упругой и пластической зоне решения представляются в форме

$$U(r, t) = \frac{C(t)}{r},$$

что трактуется как условие несжимаемости материала. Тогда из уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

находится явное выражение для $C(t)$ и соответствующее поле напряжений в упругой $|\sigma_r - \sigma_\theta| < 2K$ (где $2K$ — предел текучести материала; условие пластичности берется в форме Сен-Венана) и пластической областях.

Переход материала в пластическое состояние начинается на внутренней стенке трубы с момента t^*, определяемого равенством

$$\sin^2\frac{\omega t^*}{2} = \frac{K(b^2 - a^2)}{2b^2 P}.$$

Находится подвижная граница части трубы, перешедшей в пластическое состояние. Указывается также момент t^{**}, с которого вся труба будет охвачена зоной пластичности. *Д. М. Волков*

3336. К обоснованию геометрической оптики на основе теории поля Максвелла. Мандль (Zur Begründung der Strahlenoptik aus der Maxwellschen Feldtheorie. Mandl Georg), Acta phys. austriaca, 1953, 7, № 4, 365—389 (нем.)

Рассматривается проблема обоснования уравнений геометрической оптики на основе теории Максвелла для произвольной оптической среды. Среда характеризуется симметричным тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik} и скалярной магнитной проницаемостью μ. Уравнение эйконала получается, как характеристическое уравнение максвелловской системы, и может быть представлено в виде детерминанта

$$\operatorname{Det}\left|\mu\varepsilon_{ik} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_k} - (\operatorname{grad} S)^2\delta_{ik}\right| = 0.$$

При помощи вариационного принципа из уравнения эйконала выводится принцип Ферма. Обсуждаются границы применимости лучевой оптики. Для распространяющихся волн

$$E_i = a_i(x_\nu)\exp\left[\frac{i}{\lambda_0}(S(x_\nu) - ct)\right]$$

в случае однородной изотропной среды условие применимости имеет вид

$$\lambda_0^2\left|\frac{\Delta a_i}{a_i}\right| \ll \varepsilon\mu = n^2,$$

где $2\pi\lambda_0$ — длина волны в вакууме. Для неоднородной изотропной среды это условие принимает форму

$$\lambda_0^2\left|\frac{\mu\operatorname{rot}_i\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)}{a_i}\right| \ll n^2.$$

Ю. Н. Днестровский

3337. Возбуждение в проводящем слое при наличии малой токонесущей петли. Уэйт (Induction in a conducting sheet by a small current-carrying loop. Wait James R.), Appl. Scient. Res., 1953, B3, № 3, 230—236 (англ.)

Рассматривается проблема малой токонесущей петли, расположенной над тонким плоским проводящим слоем. Разбираются случаи, когда ось петли расположена перпендикулярно и параллельно слою. Задача решается в предположении, что частоты достаточно малы и справедливо ста-

тическое приближение, т. е. поля удовлетворяют уравнению Лапласа.

Петля представляется точечным магнитным диполем с силой

$$c_1 = i\,\mu\omega\, I\,\frac{dA}{4\pi},$$

где I — сила тока, dA — площадь петли.

Слой имеет проводимость σ и толщину d. Петля располагается в начале координат, а слой — в плоскости $z = -h$.

В случае вертикального магнитного диполя вектор магнитного поля представляется в виде

$$i\,\mu\omega\,\mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ имеет только $F_z \neq 0$ и подчиняется уравнению $\Delta F_z = 0$. Тогда вектор электрического поля определяется так:

$$E_\varphi = \frac{\partial F_z}{\partial \rho},\quad E_\rho = E_z = 0.$$

Функция F_z представляется в виде

$$F_z = \begin{cases} F_1 = c_1 \int\limits_0^\infty f_1(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\,d\lambda + F_0, & z > -h, \\ F_2 = c_1 \int\limits_0^\infty f_2(\lambda) e^{\lambda z} J_0(\lambda\rho)\,d\lambda, & z < -h, \end{cases}$$

где F_0 — решение в отсутствии проводящего слоя:

$$F_0 = \frac{c_1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} = c_1 \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\,d\lambda.$$

Используя граничные условия непрерывности тангенциальной компоненты $\mathbf{E}$ и скачка тангенциальной компоненты $\mathbf{H}$ (за счет токов в проводящем слое), автор получает выражения для $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = -(i\,\sigma\mu\omega\,d)\,(2\lambda + i\,\mu\sigma\omega\,d)^{-1} e^{-2\lambda h},$$

$$f_2(\lambda) = -(i\,\sigma\mu\omega\,d)\,(2\lambda + i\,\sigma\mu\omega d)^{-1}.$$

Функция F отсюда может быть записана в форме

$$F_1 = c_1 r^{-1} - c_1 iq \int\limits_0^\infty (\lambda + iq)^{-1} e^{-\lambda(z+2h)} J_0(\lambda\rho)\,d\lambda,$$

$$F_2 = c_1 r^{-1} - c_1 iq \int\limits_0^\infty (\lambda + iq)^{-1} e^{\lambda z} J_0(\lambda\rho)\,d\lambda,$$

где $q = \sigma\mu\omega\,d/2$.

Аналогично решается задача о горизонтально расположенном диполе. Полученные результаты используются для решения задачи о взаимном импедансе двух диполей над проводящим слоем.

Ю. Н. Днестровский

3338. Теория светового поля. Мун, Спенсер (Theory of the photic field. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 1, 33—50 (англ.)

Под теорией светового поля понимается применение теории векторного поля к расчетам световой энергии, при этом явления распространения света рассматриваются с точки зрения геометрической оптики, без учета волновой природы света.

Начало этой теории положено в 1893 г. Мемке, который ввел понятие светового вектора. В дальнейшем развитии теории, включая работы Фока, Гершуна, Гуревича, Генкина и Ямаути, авторы не видят достаточной полноты и общности и, считая, что она имеет не только чисто теоретический интерес, ставят своей задачей сформулировать основные положения теории и исследовать границы ее применимости.

Световым вектором, или D-вектором, называют вектор, направлением которого является направление распространения лучистой энергии и величина которого равна количеству лучистой энергии, приходящейся на единицу площади, плоскость которой ортогональна к направлению распространения лучистой энергии. Световым полем называется часть пространства, в которой определен D-вектор. Вся теория светового поля излагается в виде двадцати пяти теорем. Первая группа теорем (1—10) характеризует возможные методы исследования поля вектора D: метод скалярного потенциала, метод вектор-потенциала и метод квазипотенциала, и относится к любым средам. Вторая группа теорем (11—17) устанавливает условия, при которых поля одного точечного источника, конечного числа точечных источников и поверхностного источника будут иметь скалярный потенциал, или квазипотенциал. Среда предполагается однородной и изотропной. О поверхностном источнике предполагается, что он идеально диффузный и равномерной яркости. Теоремы 18—20 характеризуют предельные условия для светового вектора в случае поверхностных источников диффузного излучения равномерной яркости; последняя из этой группы теорем учитывает поле, создаваемое многократными отражениями. Среды изотропные и однородные.

Теоремы 21, 22 устанавливают существование квазипотенциала для случаев: 1) поля, имеющего осевую симметрию; 2) однородного, простирающегося до бесконечности в одном направлении поля. Теоремы 23—25 относятся к методу вектор-потенциала.

В качестве примера применения теории рассматривается поле идеально диффузного поверхностного источника равномерной яркости, имеющего форму эллипсоида вращения. Теоремы, приведенные в статье, в большей части известны, некоторые из них являются новыми. К числу последних следует, видимо, отнести теорему 15 и непосредственно получающуюся из нее теорему 16.

Теорема 15. Для того чтобы существовал скалярный потенциал поля идеально рассеивающего поверхностного источника равномерной яркости, поверхность которого совпадает с координатной поверхностью ортогональной системы координат, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между двумя поверхностями одного и того же семейства было всюду постоянным.

Теорема 16. Поверхностными источниками (идеально рассеивающими, равномерной яркости), поле которых безвихревое, могут быть только источники, поверхности которых или плоскости, или сферы, или круговые цилиндры.

Доказательства приводятся не для всех теорем, не приведено доказательство теоремы 15.

П. П. Касьянков

3339. Замечания о приближенном решении уравнения диффузии. II. Хирон (Comments on the approximate solution of the diffusion equation: II. Hearon John Z.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 2, 111—119 (англ.)

Продолжается (РЖМат, 1953, 1211) исследование ошибки, получаемой при решении уравнения диффузии

$$\nabla^2 C = -\frac{Q}{D_i}$$

в постоянном сферическом объеме радиуса r_0 приближенным методом Н. Рашевского (C — концентрация, Q — выделение, D_i — коэффициент диффузии). Рассматриваются два частных случая:

1) $Q = -kC(r)$; $k > 0$ и 2) $Q = Ar\exp(-\nu r)$.

В первом случае ошибка зависит от величины $r_0^2 k / D_i$ и будет малой при малых Q. Во втором случае и при малых Q ошибка может быть велика. Кратко рассмотрено улучшение метода, заключающееся в разбиении сферы на области монотонной концентрации. *И. М. Соболь*

3340. Изменение температуры в приземном слое атмосферы и предсказание заморозков. Берлянд М. Е., Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1953, № 2, 166—182

При некоторых физических гипотезах автор сводит задачу о предсказании изменения температуры к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом температуропроводности: $k(z) = k_0 + k_1 z$ при $0 \leqslant z \leqslant h$ и $k(z) = \text{const}$ при $z \geqslant h$. Учитывается теплообмен в почве и внешний приток тепла к границе (радиация). Рассматриваемая задача является по существу трехслойной ($z < 0$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и $h \leqslant z$).

Получено общее решение задачи с начальными условиями и показана практическая возможность использования квазистационарного приближения. Для больших и малых значений времени получены приближенные формулы. *А. М. Обухов*

3341. О свободной тепловой конвекции в вертикальных цилиндрах произвольного сечения. Бугаенко Г. А., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 4, 496—500

Исследуется класс конвекционных чисто вертикальных движений жидкости или несжимаемого газа в вертикальных цилиндрах произвольного профиля. Изучение движений такого класса сводится к предварительному отысканию в соответствующей плоской области стационарной температуры (решение простейших предельных задач для двумерного уравнения Лапласа), затем к решению двумерного уравнения Пуассона для вертикальной скорости, которая на границе обращается в нуль, что выражает факт прилипания вязкой жидкости к стенкам цилиндра. Приведенные в статье примеры очень элементарны. *Д. М. Волков*

3342. О математике процессов обмена в замкнутых трубках. I. Математические решения и асимптотические разложения. Голдстейн (On the mathematics of exchange processes in fixed columns. I. Mathematical solutions and asymptotic expansions. Goldstein S.), Proc. Roy. Soc., 1953, A219, № 1137, 151—171 (англ.)

Обмен теплоты или ионов, происходящий при прохождении жидкости через пористое твердое тело, описывается системой

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = u - rv + (r-1)uv. \qquad (1)$$

Она приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} + r\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

при следующих условиях:

$$F(x,0) = \exp[(1-r)x],$$

$$F(0, y) = \exp\left\{(1-r)\int_0^y [u_0(\tau) - 1]\,d\tau\right\}$$

($x, y > 0$, r — постоянная, u_0 — заданная функция).

Уравнение (2) решается при помощи операционного исчисления (преобразование происходит по y). Более подробно рассматриваются частные случаи, когда u_0 — постоянная, или же $u_0 = 1$ ($0 < y < Y$), $u_0 = 0$ ($y > Y$), а также случай $r = 1$.

Решения выражаются при помощи функции

$$J(x, y) = \exp\left(\frac{-px}{p+1}\right), \qquad (3)$$

которая исследуется впоследствии (в особенности ее асимптотическое поведение). Исходя из формулы обращения, которая дает интегральное представление $J(x, y)$, автор методом перевала находит три различных асимптотических разложения этой функции.

В приложении указывается несколько других, рассмотренных в литературе, проблем прикладной математики, при решении которых используется функция $J(x, y)$.

$J(x, y)$ выражается при помощи функций Ломмеля от двух мнимых аргументов, изученных П. И. Кузнецовым и референтом (Риекстыньш Э. Я., Прикл. математика и механика, 1951, 15, № 4, 485—494). Поэтому свойства $J(x, y)$ легко получаются также из теории этих функций, в частности, первое асимптотическое разложение, приведенное в реферируемой работе. *Э. Я. Риекстыньш*

3343. О математике процессов обмена в замкнутых трубках. II. Теория равновесия как предельный случай кинетической теории. Голдстейн (On the mathematics of exchange processes in fixed columns. II. The equilibrium theory as the limit of the kinetic theory. Goldstein S.), Proc. Roy. Soc., 1953, A219, № 1137, 171—185 (англ.)

Система

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ u - rv + (r-1)uv = 0$$

($r > 0$ — постоянное) описывает случай равновесия в процессе обмена ионов; она решается при условиях:

а) $$u(0, y) = \begin{cases} 0 \text{ при } y < 0, \\ 1 \text{ при } y > 0; \end{cases}$$

б) $u(0, y)=\begin{cases}0 \text{ при } y<0,\\ 1 \text{ при } 0<y<Y,\\ 0 \text{ при } y>Y\end{cases}$ ($Y>0$ — фиксированное).

При этом приходится отдельно рассматривать случаи $r>1$, $r=1$, $r<1$. Затем показано, что построенные решения получаются также предельным переходом из тех решений системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=u-rv+(r-1)uv,$$

которые при условиях а) и б) имеются в первой части работы (см. реф. 3342). Из первой части здесь используются также асимптотические значения функции $J(x, y)$. В заключение указаны некоторые нерешенные задачи, связанные с настоящей работой. *Э. Я. Риекстыньш*

3344. К математической биофизике сердечно-сосудистой системы. Карман (Contributions to the mathematical biophysics of the cardiovascular system. Karreman George), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 2, 185—195 (англ.)

Прямолинейная трубка заполнена однородной жидкостью. Диаметр трубки равен $2R$ при $0<x<L_1$ и $2r$ при $L_1<x<L_2$. Предполагается, что в жидкости распространяется упругая волна

$$p=A\exp[ik(x-ct)]+B\exp[-ik(x+ct)].$$

Из элементарных соображений (непрерывность давления и непрерывность потока) находится связь между давлениями и коэффициентами отражения B/A по обе стороны точки $x=L_1$.

При помощи аналогичной схемы получена формула для определения точного положения сужения кровеносного сосуда по результатам измерения кровяного давления по обе стороны сужения. Однако автор замечает, что эта формула точных результатов не дает. *И. М. Соболь*

3345. Приближенное изучение образования разницы в концентрациях ионов по обе стороны пленки. Ландал, Карман (Approximate treatment of the formation of a difference in the concentrations of an ion at the two sides of a membrane. Landahl H. D., Karreman G.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 2, 167—171 (англ.)

Изучается диффузия ионов через тонкую пленку, причем в каждой точке пленки на ионы действует в одном направлении постоянная сила. В начальный момент по обе стороны пленки концентрация ионов одинакова. В дальнейшем с обеих сторон пленки образуются разные концентрации. Приближенно определяется отношение этих концентраций. *И. М. Соболь*

3346 К. Разложения в ряды в математической физике. Лензе (Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Lense Josef, 3-te Aufl., S. 216, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1953, 26 DM) (нем.)

3-е издание несущественно отличается от второго. Исправлены все замеченные опечатки. Кроме того, наряду с небольшими изменениями текста упрощены некоторые доказательства и переставлены некоторые параграфы.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 979.

См. также: 3195 **РЕЦ**, 3207, 3296, 3360 **К**, 3376, 3377, 3446, 3452, 3458, 3459, 3460, 3462

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3347. Расходящийся итерационный процесс. Робертс (A nonconvergent iterative process. Roberts J. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 640—644 (англ.)

Исследуется возможность получения решения уравнения

$$y(t)=\int_0^t \frac{G[y(x)]}{\sqrt{\pi(t-x)}}\,dx\equiv A\{y(x)\}$$

методом последовательных приближений («итерационным процессом»), при котором $y_0(t)\equiv 0$, $y_{n+1}(t)=A\{y_n^*(x)\}$, где $y_n^*(x)=\min\{y_n(x),1\}$, — если $G(y)$ непрерывна, строго убывает при $y\geqslant 0$ и $G(1)=0$. В этих условиях

$$y_0(t)\leqslant y_2(t)\leqslant\ldots\leqslant y_3(t)\leqslant y_1(t)=2G(0)\pi^{-1/2}\sqrt{t},$$

причем все функции монотонно возрастают и $y_{2n}(t)\leqslant 1$. Таким образом, существуют

$$Y_1(t)=\lim y_{2n}(t)\leqslant\lim y_{2n+1}(t)=Y_2(t).$$

Автор ссылается на работу свою и Манна (Roberts J. H., Mann W. R., Pacif. J. Math., 1951, 1, 431—445), в которой было доказано существование решения $y(t)=A\{y(x)\}$, положительного и строго возрастающего, причем $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=1$. Отсюда следует: $Y_1(t)\leqslant y(t)\leqslant Y_2(t)$. В работе Манна и Вольфа (Mann W. R., Wolf F., Quart. Appl. Math., 1951, 9, 163—184) было показано, что $Y_1(t)\equiv y(t)\equiv Y_2(t)$, т. е. итерационный процесс сходится к решению, если $G(y)$ (при прежних условиях) удовлетворяет еще условию Липшица. В реферируемой работе строится пример функции

$$G(y)=\begin{cases}1-y, & 0\leqslant y\leqslant 1/2,\\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{2y-1}\right), & y>1/2,\end{cases}$$

не удовлетворяющей условию Липшица (в точке $y=1/2$ справа), для которой итерационный процесс расходится.

С другой стороны, доказывается, что итерационный процесс сходится, если условие Липшица заменить условием выпуклости $G(y)$. *М. К. Фаге*

3348. О распределении кинетической энергии в «однокомпонентной» системе с источниками частиц. Ступоченко Е. В., Вестн. МГУ, 1953, 5, № 8, 57—71

Рассматривается случай, когда производимые источниками частицы A резко отличаются по массе от частиц всех остальных компонент газовой смеси.

Отбрасывается предположение о малой относительной концентрации частиц A.

Для решения задачи применяется способ разложения по степеням малого параметра, что дает возможность вычислить вероятность того или другого результата соударения частицы A с какой-либо из остальных частиц на основе максвелловского распределения партнеров частицы A по соударению.

Пусть $N(c)dc$ — число частиц, обладающих начальной скоростью $(c,\ c+dc)$, появляющихся в единице объема в единицу времени в результате деятельности источников, равномерно распределенных в пространстве. $f(\vec{c},\ t)\,d\vec{c}$ — полное число частиц в единице объема, обладающих скоростью $(\vec{c},\ d\vec{c})$.

Тогда кинетическое уравнение Больцмана, обобщенное на случай источников частиц, примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{(\vec{c}_1)}|\vec{c}_1-\vec{c}|\cdot(f'f_1'-ff_1)\,d\vec{c}_1 b\,db\,d\varphi+\frac{N(c)}{4\pi c^2},\quad(1)$$

b — прицельное расстояние, φ — угловой параметр удара.

Вводится безразмерный параметр, характеризующий интенсивность источника:

$$\beta=\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty}|N(c)|\,\tau(c)\,dc,\quad(2)$$

где

$$\rho=\int_{(\vec{c})}f(\vec{c},\ t)\,d\vec{c},\quad(3)$$

$\tau(c)$ — среднее время, протекающее до ближайшего соударения молекулы с какой-либо из окружающих. В практически важных случаях $\beta\ll 1$. Обычные методы линеаризации нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1) неприменимы, так как получаемые уравнения, определяющие поправки высших приближений, годны лишь в течение малых промежутков времени. Поэтому используется параметрическое представление метода разложения по степеням малого параметра, данное Н. Н. Боголюбовым.

Для изучения квазистационарного распределения решение уравнения (1) ищется в виде ряда

$$f(\vec{c},t)=f^{(0)}(\vec{c};\ \rho,\ \theta)+\beta f^{(1)}(\vec{c};\ \rho,\ \theta)+\beta^2 f^{(2)}(\vec{c};\ \rho,\ \theta)+\ldots,\quad(4)$$

где для $\rho(t)$ и θ, определяемых равенством

$$\rho\theta=\int_{(\vec{c})}\frac{mc^2}{2}f(\vec{c},\ t)\,d\vec{c},\quad(5)$$

имеем разложения:

$$\frac{d\rho}{dt}=\beta R_1(\rho,\ \theta)+\beta^2 R_2(\rho,\ \theta)+\ldots,$$
$$\frac{d\theta}{dt}=\beta\Phi_1(\rho,\ \theta)+\beta^2\Phi_2(\rho,\ \theta)+\ldots\quad(6)$$

Коэффициенты разложений (4) и (6) должны быть определены так, чтобы выражение (4) удовлетворяло кинетическому уравнению, если вместо ρ и θ подставить решения уравнений (6).

В результате подстановки разложений (4) и (6) в кинетическое уравнение и сравнения членов одинакового порядка получается ряд интегральных уравнений для $f^{(0)}$, $f^{(1)}$,... и т. д. Решением уравнения для $f^{(0)}$ является максвелловское распределение. Для остальных линеаризованных уравнений доказывается существование решений.

Основываясь на полученных решениях, автор рассматривает случай «монохроматического» источника, область «далеких» энергий, вопрос о конечных возмущениях в области далеких энергий.

Ю. А. Митропольский

3349. Исследование контактного напряженного состояния для тел переменной кривизны с прямолинейной линией соприкосновения. Грубин А. Н., Сб. науч. тр. Куйбышевского индустр. ин-та, 1953, № 4, 27—60

С некоторыми изменениями излагается более ранняя работа автора (Контактные напряжения в зубчатых и червячных зацеплениях, ЦНИИТМАШ, кн. 30, 1949, Машгиз), в которой дано приближенное решение задачи, сформулированной в названии статьи. Эта задача является обобщением известной задачи Герца о соприкосновении двух упругих тел. Введя некоторые упрощающие предположения, автор сводит задачу к одномерному сингулярному интегральному уравнению, которое просто решается.

Результаты применяются к расчету напряжений при контакте: а) двух конических катков с угловой ошибкой при установке осей, б) двух цилиндрических прямозубых колес.

Дается оценка погрешности построенного автором общего приближенного решения. Эта оценка неприменима, так как выражена через расходящийся интеграл.

С. Г. Михлин

См. также: 3331, 3465

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3350. К теории нелинейных и линейных задач о собственных значениях. Кондрашов В. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 2, 129—132

Пусть D — область n-мерного пространства с границей $S=\sum_{s=1}^{n}S_{n-s}$ (S_{n-s} —многообразие измерения $n-s$); $W_p^m(0)$ — пространство функций, имеющих суммируемые со степенью p производные до порядка m и обращающихся в нуль на S_{n-s} вместе с производными до порядка $m-\left[\frac{s}{p}\right]-1$. Рассматривается положительный функционал

$$\int_D\ldots\int\Phi_m^p(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi,\ \ldots,\ \varphi^{(m)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n})\,dv\quad(1)$$

$$(dv=dx_1\ldots dx_n)$$

при дополнительном условии

$$1=\int\limits_D\dots\int F^q_{m-\lambda}(x_1,\dots,x_n,\varphi,\dots,\varphi^{(m-\lambda)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n})\,dv, \quad (2)$$

где

$$1\leqslant\lambda\leqslant m,\quad 1<q<\frac{np}{n-p\lambda}\ (q\text{ — любое при }p\lambda\geqslant n);$$

$$\Phi^p_m(\varphi;\ x)=\sum_{\Sigma\alpha=m}A_{m,p}(x)\,|\,\varphi^{(m)}_{\alpha_1,\dots\alpha_n}\,|^p+\dots,$$

$$F^p_m(\varphi;\ x)=\sum A_{l_r,q}(x)\,|\,\varphi^{(l_1)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}\,|^{q_1}\dots|\,\varphi^{(l_n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}\,|^{q_n}$$
$$\left(\sum q_r\leqslant p,\ \max l_r\leqslant m\right).$$

Сообщается, что существует последовательность решений u_k следующих рекуррентных вариационных задач: в $W^m_p(0)$ найти функцию $\varphi=u_k$, реализующую решение задачи о минимуме интеграла (1) при дополнительных условиях (2) и

$$\int\limits_D\dots\int F^{q-1,1}_{m-\lambda}(u_j,\ \varphi)\,dv=0,\ j=1,\dots,k-1. \quad (3)$$

Функции u_k при этом удовлетворяют вариационному уравнению

$$\int\limits_D\dots\int\Phi^{p-1,1}_m(u_k,\ \xi_k)\,dv-$$
$$-\mu_k\int\limits_D\dots\int F^{q-1,1}_{m-\lambda}(u_k,\ \xi_k)\,dv=0,$$

где

$$\frac{q}{p}\int\limits_D\dots\int\Phi^p_m(u_k)\,dv=\mu_k;$$

$$\int\limits_D\dots\int F^{q-1,1}_{m-\lambda}(u_j,\ \xi_k)\,dv=0,\quad j=1,\dots,k-1$$

(ξ_1 — пробегает все $W^m_p(0)$). Значения $\mu_k\to+\infty$, а система функций u_k «ортогональна» и «полна» в известном смысле. Приводятся приложения этих предложений к линейным и нелинейным эллиптическим дифференциальным уравнениям порядка $2m$. *М. И. Вишик*

3351. Вычисление последовательных вариаций кратного интеграла инвариантным методом Донде. Де Словере (Le calcul des variations successives d'une intégrale multiple, par la méthode invariantive de Th. De Donder. De Sloovere H.), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci, 1953, сер. 5, **39**, № 5, 474—480 (франц.)

При помощи метода Т. де Дондера (Donder Th. de, Théorie invariantive du calcul des variations, Nouvelle edition, Paris, Gauthier-Villars et C-ie, 1935) вычисляются первая, вторая и третья вариации n-кратного интеграла

$$I_n=\int\limits_{(n)}F(x^i,\ y^\alpha,\ y^\alpha_j)\,d\,(x^1\dots x^n)\ \begin{matrix}i,\ j=1,\dots,n\\ \alpha=1,\dots,m,\end{matrix}$$

что дает возможность указать рекуррентный способ вычисления последовательных вариаций данного интеграла. *В. В. Вагнер*

См. также: 3195 **РЕЦ**, 3336

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3352. Общее понятие функции. Ч. I, 2. Гончаров (Noţiunea generală de funcţie. Part 1, 2, (Traducere. Publicat in «Enciclopedia Elementarnoi Matematiki» vol. III). Goncearov V. L.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 10, 437—451; № 11, 485—513 (рум.)

Перевод раздела «Общее понятие функции» гл. V статьи В. Л. Гончарова «Элементарные функции действительного переменного. Пределы последовательностей и функций» (см. Энциклопедию элементарной математики, т. III, Гостехиздат, М.—Л., 1952).

3353. Одна теорема о предельном значении. Форстер (Ein Grenzwertsatz. Forster Herbert), Sitzungsber. Math.-Naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 93—97 (1953) (нем.)

Пусть $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$, где $f_n(x)=b_0b_1\dots\dots b_nx^{b+cn}$, $b_n\downarrow 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+k}/b_n=1$ для каждого k. Пусть $G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(x)$, где $g_n(x)>0$ для больших n и $\lim\limits_{x\to+\infty}|\,g_n(x)/g_{n+1}(x)\,|=0$ для каждого n. Если $\{\tau_n\}$, $0\leqslant\tau_n\leqslant1$, есть последовательность действительных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,(b_nx^c)^{\tau_n}/g_n(x)=K$ равномерно для $x\geqslant x_0$, то

$$\lim_{x\to\infty}F(x)/G(x)=K.$$

Например, пусть

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'\,x^{2n}/n!\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(2n+\alpha+1)$$

и $G(x)=x^{1/2}F'(x)$. Применяя теорему при $\tau_n=3/4$, получим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)/G(x)=2^{-1/2}$.

Бак (R. C. Buck)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 973.

3354. К теории дифференциалов высших порядков. Коромина с (Contribution a la théorie de la dérivation d'ordre supérieur. Corominas Ernest), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 3, 177—222 (франц.)

По определению Данжуа (Denjoy A., Fund Math., 1935, 25, 273—326), функция $f(x)$, заданная и непрерывная в некотором промежутке, имеет дифференциал порядка n в некоторой точке $x=x_0$,

этого промежутка, если возможно представление вида (при $h \to 0$)

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n),$$

где $P_n(h)$ — полином степени n относительно h. Множитель $f_n(x_0)$ при $\frac{h^n}{n!}$ в полиноме $P_n(h)$ называется n-ым дифференциальным отношением (д. о.) (quotient différentiel) функции f в точке $x = x_0$; произведение $h^n f_n$ и есть дифференциал порядка n.

Дифференциал порядка n существует не только при тривиальном предположении, что $f(x)$ допускает непрерывные производные порядков $\leqslant n-1$ в окрестности точки x_0 и производную порядка n в самой этой точке (при этом предположении $f_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$). Это демонстрируется на примере

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) \sin \exp(x^{-2}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

В точке $x_0 = 0$ существует и равна нулю производная $f'(0)$, прочие же производные $f^{(m)}(0)$ $(m \geqslant 2)$ не существуют; однако дифференциальные отношения всех порядков существуют и равны нулю.

Автор ставит перед собой вопрос: какие предложения классического анализа остаются в силе, если ограничиться допущением о существовании дифференциальных отношений до данного порядка n включительно? Он обнаруживает, что, в частности, могут быть обобщены так называемое свойство Дарбу, теорема Коши с правилом Лопиталя, формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (с условием замены производной в остаточном члене соответствующим д. о.); кроме того, д. о. порядка m от д. о. порядка n есть д. о. порядка $m+n$, хотя, напротив, д. о. порядка $m+n$ необязательно есть д. о. порядка m от д. о. порядка n (результат Данжуа). Одним из достаточных условий для существования производной $f^{(n)}(x_0)$ и равенства $f^{(n)}(x_0) = f_n(x_0)$ является ограниченность д. о. $f_n(x)$ функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. В качестве рабочего аппарата использованы «разделенные разности»

$$[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \quad \text{и т. д.}$$

Настоящая публикация представляет собою первую часть работы, две другие части которой должны появиться в других изданиях.

В. Л. Гончаров

3355. Пределы, рассматриваемые в связи с дифференцированием $\sin x$. Пиз (Limits used in the derivative of $\sin x$. Pease D. K.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 477 (англ.)

1. Вычисление предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

произведено таким образом, чтобы избегнуть предварительного вычисления предела обратной величины

$$\frac{\Delta x}{\sin \Delta x}.$$

2. Указан прием вычисления предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x},$$

позволяющий избегнуть применения «половинных углов». *В. Л. Гончаров*

3356. О точке минимума суммы расстояний от данных точек. Ханани (On a point of minimum sum of distances from given points. Hanani Haim), Riveon Lematematika, 1953, **6**, 24—25 (иврит; резюме англ.)

Автор ограничивается простым случаем, когда точка минимума не совпадает ни с одной из данных точек. *Страус (E. G. Straus)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 896.

3357. Возвратные последовательности 3-го порядка. Ярден (Recurring sequences of order 3. Jarden Dov), Riveon Lematematika, 1953, **6**, 41—44 (иврит.)

Автор рассматривает разностные уравнения типа

$$w_n = aw_{n-3} + bw_{n-2} + cw_{n-1}$$

и получает некоторое число алгебраических рекуррентных соотношений, а также некоторые рекуррентные сравнения в случае, когда a, b, c, w_0, w_1, w_2 рациональные. *Страус (E. G. Straus)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 987.

3358. Метод вывода различных формул электростатики и электромагнетизма при помощи тригонометрических тождеств Лагранжа. Муньис (A method for deriving various formulas in electrostatics and electromagnetism using Lagrange's trigonometric identities. Muñiz Eddie Ortiz), Amer. J. Math., 1953, **21**, № 2, 140—141 (англ.)

3359. Опечатки (Errata), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **50** (Contents, January to June), 21 (англ.)

Опечатки к статье Брёйна и Эрдёша «Об одной рекуррентной формуле и некоторых тауберовых теоремах» (РЖМат, 1953, 1245).

3360 К. Курс математического анализа. Бермант А. Ф., Ч. I, изд. 7-е, переработанное, 466 стр., 10 р. 15 к., 1953; Ч. II, изд. 5-е, переработанное, 359 стр., 1953, 7 р. 85 к.

Книга является учебным пособием для высших технических учебных заведений.

Первая часть состоит из введения и 9 глав (I—IX): Функция; Предел; Производная и дифференциал; Исследование функций и линий; Определенный интеграл; Неопределенный интеграл; Способы вычисления определенных интегралов и несобственные интегралы; Применение интеграла; Ряды.

Вторая часть состоит из 6 глав (X—XV): Функции нескольких переменных; Применение дифференциального исчисления; Многомерные интегралы и кратное интегрирование; Криволинейные интегра-

лы и интегралы по поверхности; Дифференциальные уравнения; Тригонометрические ряды.

П. И. Романовский

3361 К. Курс математического анализа. Т. I. Абделькхан (Curso de análise matemática. Vol. I. Abdelhay J., 2-nd ed., pp. XVI+232, Universidade do Brasil, Rio de Janeiro, 1953) (порт.)

Рассмотрены темы: топология на прямой линии; пределы; непрерывность и дифференцируемость для функций одного действительного переменного; римановы интегралы (в подробном изложении); нахождение неопределенных интегралов; несобственные интегралы. *Боас (R. P. Boas, Jr.)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 959.

3362 К. Математический анализ. Каплан (Advanced calculus. Kaplan Wilfred, pp., XIII+679, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1952, 8.50 doll.) (англ.)

Введение. Обзор алгебры, аналитической геометрии и введения в анализ. Гл. 1. Векторы; Гл. 2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; Гл. 3. Векторное дифференциальное исчисление; Гл. 4. Интегральное исчисление функций нескольких переменных; Гл. 5. Векторное интегральное исчисление; Гл. 6. Бесконечные ряды; Гл. 7. Ряды Фурье и ортогональные функции; Гл. 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения; Гл. 9. Функции комплексного переменного; Гл. 10. Дифференциальные уравнения в частных производных. *Оглавление*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 959.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3363. Один критерий сходимости рядов. Драхлин Е. Х., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, 8, № 1, 11—12

Пусть $F(x)=f(x)\varphi(x)$ — непрерывная, монотонно стремящаяся к 0 при $x\to\infty$, положительная для $x>a$ функция;

$$f(x)>0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

Доказывается:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F(n)$ сходится, если $cf(x)\varphi(x)<-f'(x)$ (c — положительная постоянная), и расходится, если $c[f(x)]^2\varphi(x)>-f'(x)$. *М. Д. Калашников*

3364. Связь между обыкновенным и повторными пределами двойных бесконечных последовательностей. Гарсия-Прадильо (Relation between the ordinary and iterated limits of doubly infinite sequences. García Pradillo Julio), Gac. mat., 1953, 5 (1), 8—10 (исп.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 974.

3365. Теорема Икехара и абсолютная суммируемость C. Чэнь Цзянь-гун (伊格哈拉的定理與絕對總和性 C 。陳建功), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 1, 8—11 (кит.; резюме англ.)

Теорема Икехара состоит в том, что если ряд Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (s=\sigma+it)$$

абсолютно сходится при $\sigma>1$ и $F(s)$ непрерывна на $\sigma=1$, то из $a_n>-K$ следует $\sum_{n=1}^{x} a_n=o(x)$. Условие $a_n>-K$ не является излишним. Это следует из существования ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ со свойствами: (I) ряд абсолютно сходится при $\sigma>1$; (II) функция $\sum a_n x^n$ ограниченной вариации в $(0, 1)$; (III) $\sum_{n=1}^{x} a_n \neq o(x)$. Доказывается, что существование такого ряда есть следствие теоремы: существует расходящийся ряд $\sum c_n$, суммируемый методом Чезаро (C, α) любого положительного порядка α. *Ю. В. Линник*

3366. Квазитауберова теорема о рядах Фурье. Балагангадхаран (A quasi-Tauberian theorem on Fourier series. Balagangadharan K.), J. Indian Math. Soc. (N. S.), 1952, 16, 183—190 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Положим $\alpha_\mu(t)=2^\mu\Gamma(1+\mu)t^{-\mu}J_\mu(t)$, где $J_\mu(t)$ — функция Бесселя μ-го порядка. Ряд $\sum a_n$ называется суммируемым J_μ к числу s, если $\sum a_n\alpha_\mu(nt)$ сходится при малых t и стремится к s при $t\to+0$ (ср. Chandrasekharan, Szász, Amer. J. Math., 1948, 70, 709—729). Автор доказывает, что если

$$a_n=O(n^{-\delta}), \tag{1}$$

$$s_n-s=O(n^{-\alpha})\,(C, p), \tag{2}$$

где $0<\delta<1$, $0<\alpha<1$, $p>\alpha$, $\alpha p>1-\delta$, то ряд $\sum a_n$ суммируем $J_{p-1/2}$. Автор указывает также, что если O заменить на o в (2), то (повидимому) $\alpha p>1-\delta$ может быть заменено условием $\alpha p\geqslant 1-\delta$. Случай $p=1$ дает результат Шметтерера (Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B, II a, 1950, 158, 37—59), так как $\alpha_{1/2}(t)=t^{-1}\sin t$. Комбинируя свой результат с результатом Чандрасекхарана и Саса (см. цитированную статью), автор выводит следствие, которое содержит теорему Лоо (Loo), относящуюся к непрерывности по Чезаро функции, изображаемой рядом Фурье (Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, 508—518). *Бованке (L. S. Bosanquet)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 636.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3367. Об одном обобщении на две переменные функции Миттаг-Леффлера. Эмбер, Дельрю (Sur une extension à deux variables de la fonction de Mittag-Leffler. Humbert Pierre, Delerue Paul), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 18, 1059—1060 (франц.)

Авторы вводят в рассмотрение функцию двух переменных

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{m+\frac{\beta(n+1)-1}{\alpha}}y^n}{\Gamma[m\alpha+(n+1)\beta]\,\Gamma(n\beta+1)},$$

частными случаями которой являются функция Миттаг-Леффлера

$$E_\alpha(x) = \mathcal{E}_{\alpha,1}(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

и обобщение последней

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(m\alpha+\beta)},$$

принадлежащее Агарвалу (РЖМат, 1953, 675).

Показывается, что двумерное преобразование Лапласа рассматриваемой функции представляет собой простую алгебраическую функцию переменных p и q, что дает возможность вывести ряд свойств функции $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(x, y)$ путем применения обычных правил операционного исчисления. В частности, приводится полученное таким образом интегральное соотношение

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(x^\alpha, y^\beta) = \mathcal{E}_{2\alpha,\beta}(x^{2\alpha}, y^\beta) + \int_0^x \frac{(x-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{E}_{2\alpha,\beta}(s^{2\alpha}, y^\beta)\, ds,$$

являющееся обобщением соответствующего тождества для функции Миттаг-Леффлера, установленного в более ранней работе Эмбера (РЖМат, 1953, 1159).

Примечание референта. Выражение функции $E_{\alpha,\beta}(x)$, данное в заметке, содержит опечатку. Определение этой же функции, данное в РЖМат, 1953, 675, также приведено с опечаткой.

Н. Н. Лебедев

3368. О функциях Бесселя от двух переменных. Эмбер (A propos des fonctions de Bessel à deux variables. Humbert Pierre), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, **67**, № 1, 19—22 (франц.)

Функции Бесселя от двух переменных, которые, как указывает автор, в основном находят свое применение в небесной механике, были впервые введены Аппелом (Appell P., C. r. Acad. sci., 1915, **160**, 419). Эти функции определяются равенством

$$J_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x\cos u - y\cos 2u)\, du.$$

Производящей функцией для них служит

$$e^{-\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} u^n J_n(x, y).$$

Автор использует операционное исчисление для исследования этих мало изученных функций. В частности, этим путем он довольно просто выводит равенство

$$J_0(2\sqrt{t}, t) = J_0(t) - 2\sqrt{t} \int_0^{\pi/2} J_0(t\sin 2\theta) \times J_1(2\sqrt{t}\cos\theta)\sin\theta\, d\theta -$$

$$- 4t\sqrt{t} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} J_0(t\sin 2u\cos^2 v) J_1(t\sin^2 v) \times J_1(2\sqrt{t}\cos u\cos v)\cos^2 v\sin v\sin u\, du\, dv;$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_0(x, y)$ — функции Бесселя соответственно от одной и двух переменных.

М. Б. Гагуа

3369. Функции Лежандра дробного порядка. Грей (Legendre functions of fractional order. Gray Marion C.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 311—318 (англ.)

В ряде проблем теоретической физики, как например в теории электронных линз, в теории антенн, развитой в последнее время Шелкуновым, встречаются функции Лежандра $P_\nu(\cos\theta)$, у которых индекс ν есть число дробное.

Функция $P_\nu(\cos\theta)$ при нецелом значении ν имеет при $\theta = \pi$ особенность логарифмического характера.

При малых значениях θ и ν автор выводит разложение

$$P_\nu(\cos\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \nu^n, \qquad (1)$$

где

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{s=n+1}^{\infty} k_{n,s} \frac{z^s}{s};$$

$$a_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{s=n+1}^{\infty} k_{n,s} \frac{z^s}{s^2}, \quad z = \sin^2(\theta/2),$$

$k_{0,s} = 1$, $s = 1,2,\ldots$; $k_{n,s} = 0$, $s \leqslant n$; $k_{n,n+1} = \frac{1}{n!}$;

$$k_{n,s+1} = k_{n,s} + \frac{n}{s^2} k_{n-1,s}, \quad s = n+1,\ n+2, \ldots$$

Вблизи значения $\theta = \pi$ ($\theta = \pi - \varphi$) применяется формула

$$P_\nu(\cos\theta) = P_\nu(\cos\varphi)\left[\cos\nu\pi + \frac{2\sin\nu\pi}{\pi} \times \left(\log\sin\frac{\varphi}{2} + \psi(\nu) - \psi(0)\right)\right] + \frac{\sin\nu\pi}{\pi}(c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \ldots), \qquad (2)$$

где

$$c_0 = -a_1,$$
$$c_1 = -2a_2,$$
$$c_2 = -a_3 + 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{s^3} \text{ и т. д.}$$

При помощи формул (1) и (2) автор дает таблицу лежандровых функций для θ от $\theta = 10°$ до $\theta = 175°$ с индексами ν от $\nu = 0{,}1$ до $\nu = 2$ через $\Delta\nu = 0{,}1$.

В заключение исследуется вопрос о корнях уравнения $P_\nu(\cos\theta) = 0$ и дается графическое распределение корней этого уравнения для θ от $\theta = 0$ до $\theta = 160°$ в функции от ν при ν, изменяющемся от $\nu = 0$ до $\nu = 2$ через $\Delta\nu = 0{,}2$. *Н. С. Кошляков*

3370. О числе действительных нулей вырожденной (конфлюентной) гипергеометрической функции $F(a, c, x)$. Сковгорд (Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a, c, x)$. Skovgaard H.), Math. Z., 1953, 58, № 4, 448—452 (англ.)

Рассматривается функция

$$F(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

где $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Если $a = 0, -1, -2, \ldots$, то $F(a, c, x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом Лагерра $L_{-a}^{c-1}(x)$. Новым элементарным способом автор находит число действительных значений x, обращающих в нуль $F(a, c, x)$, при любых фиксированных действительных a и c. Ранее эти результаты получил Кинаст (Kienast A., Denkschr. schweiz. naturforsch. Ges., 1921, 57, 247—325), а Трикоми (Tricomi F. G., Math. Z., 1950, 52, 669—675) свел их в таблицу.

А. Л. Брудно

3371. Об одном обобщении k-функции Бейтмана. Чакрабарти (On a generalisation of Bateman's k-function. Chakrabarty N. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 1, 1—7 (англ.)

Обобщенная k-функция Бейтмана

$$k_n^l(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2^l \cos^l\theta \cos(x \operatorname{tg}\theta - n\theta)\, d\theta, \quad l > -1,$$

введенная Митра, Сривастава и автором, связана с полиномами Лагерра соотношением

$$(2x)^{-\alpha} e^x k_{2n+\alpha+1}^{\alpha-1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(2x).$$

При помощи аппарата операционного исчисления выводится связь функции $k_n^l(x)$ с другими специальными функциями, в частности, гипергеометрическими, бесселевыми, а также ряд ее свойств. Например:

$$\sum_{r=0}^{n-2l-1} \frac{(n-2l-1)!}{r!\,(n-2l-r-1)!} k_{2(r+l+1)}^{2l}(x) = \frac{2^n e^{-x} x^n}{\Gamma(n+1)},$$

$$k_{2n}^{2l}(x) = 2\int_0^x k_n^l(x-y)\, k_n^{l-2}(y)\, dy, \quad l > 1,$$

$$\frac{d^{2N}}{dx^{2N}}\left\{e^{1/2x} k_{2n}^{2l}\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} = e^{1/2x} k_{2(n-N)}^{2(l-N)}\left(\frac{1}{2}x\right),$$

$$e^{a^2x^2 - \frac{b^2}{8a^2}} J_{2l+1}(bx) = \left(\frac{2a^2x}{b}\right)^{2l+1} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu (ax)^{2\mu}}{\mu!} k_{2(\mu+l+1)}^{2l}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right).$$

В первой формуле статьи (определяющей k-функцию) имеется опечатка: под знаком тангенса должно быть θ.

В. И. Левин

3372. Замечание об асимптотическом разложении обобщенных гипергеометрических функций. Олвер (Note on the asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions. Olver F. W. J.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 462—464 (англ.)

В работе Барнса (Barnes E. W., Proc. London Math. Soc., 1906, 5, 59—116) содержится следующее асимптотическое представление линейной комбинации обобщенных гипергеометрических функций:

$$\frac{\prod_{r=1}^{q}\Gamma(1-\rho_r)}{\prod_{r=1}^{p}\Gamma(1-\alpha_r)}\, {}_pF_q\{\alpha; \rho; (-)^\mu x\} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{q} \exp\{(\mu-2m)(1-\rho_r)\pi i\}\, x^{1-\rho_r}\Gamma(\rho_r-1) \times$$

$$\times \frac{\prod_{t=1}^{q}{}' \Gamma(\rho_r-\rho_t)}{\prod_{t=1}^{p}\Gamma(\rho_r-\alpha_t)}\, {}_pF_q\{1+\alpha-\rho_r;\ 2-\rho_r, \ldots, \rho_q-\rho_r+1;\ (-)^\mu x\} \sim \exp\{-\mu e^{(\mu-2m)\pi i/\mu} x^{1/\mu}\} \times \quad (1)$$

$$\times (2\pi)^{1/2(\mu-1)} \mu^{-1/2} x^{\theta/\mu} e^{(\mu-2m)\theta\pi i/\mu} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \exp\{(2m-\mu)\, n\pi i/\mu\}}{x^{n/\mu}},$$

где $\theta \equiv \sum\alpha - \sum\rho + \frac{1}{2}(\mu-1)$, $\mu \equiv q+1-p$ целое число ($\mu > 1$), $|\arg x| < \pi$ и $m = 0, 1, \ldots, \mu$.

Автор отмечает, что этот результат в отношении допустимых значений для m, при нечетном μ, ошибочен; в этом случае разложение (1) справедливо лишь при $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \mu - \frac{1}{2}$.

М. Н. Олевский

3373. Выражения для частных сумм рядов типа гипергеометрических. Агарвал (On the partial sums of series of hypergeometric type. Agarwal R. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, № 3, 441—445 (англ.)

Работа представляет собой продолжение результатов многих математиков английской математической школы, развивающих идеи Бейли (W. N. Bailey). Если использовать обозначения книги Бейли «Generalized hypergeometric series» (Camb. Tracts Math., 1935, № 32), то результат автора заключается в доказательстве следующего утверждения:

$$\prod_{n=1}^{M} \frac{(1-Aq^n)(1-Eq^n)(1-Aq^n/DE)(1-Dq^n)}{(1-Aq^n/D)(1-Aq^n/E)(1-DEq^n)(1-q^n)} \times$$

$$\times {}_8\Phi_7\left[\begin{matrix} X, q\sqrt{X}, -q\sqrt{X}, qX/C, A/DE, Cq^M, D, E; q \\ \sqrt{X}, -\sqrt{X}, C, DEq^{M+1}, Aq/C, qX/D, qX/E \end{matrix}\right]$$

до $N+1$ члена равно тому же самому выражению, в котором M и N переставлены.

В. В. Немыцкий

3374. О сумме обрывающегося ряда ${}_3F_2(1)$. Бейли (On the sum of a terminating ${}_3F_2(1)$. Bailey W. N.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 15, 237—240 (англ.)

Известна формула Ватсона, дающая сумму обобщенного гипергеометрического ряда

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}\right] \text{ (т. е. } {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}\ x\right]\equiv $$

$$ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(1)_n (d)_n (e)_n} x^n \text{ при } x=1, \qquad (1) $$

$$ (\alpha)_n \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1),\ (\alpha)_0 \equiv 1) $$

при $2d=a+b+1$, $e=2c$,

а именно:

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ \frac{1}{2}(a+b+1), 2c\end{matrix}\ 1\right] = $$

$$ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b+c\right)} $$

При $c=-m$ (m — целое $\geqslant 0$) ряд (1) теряет смысл. Однако упомянутая формула остается справедливой и в этом случае, если рассматривать ${}_3F_2$ в ней при $c\to -m$; в таким образом рассматриваемом ряде после $m+1$ членов, — сумму которых обозначим через S_m, — следует некоторое число членов, равных нулю, вслед за которыми идет бесконечный ряд.

В реферируемой работе найдено следующее выражение для S_m:

$$ S_m = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\right)_m}{\left(\frac{1}{2}\right)_m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)_m}. $$

В ней также найдена сумма обрывающегося при $c\to -m$ ряда

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, 1-a, c\\ e, 1+2c-e\end{matrix}\right] $$

(при произвольном c, удовлетворяющем неравенству $\mathrm{Re}\, c > 0$, обеспечивающему сходимость этого ряда; он был просуммирован Уиплом).

Кроме того, установлены некоторые соотношения при $x+y=0$ между функцией Аппеля F_i ($i=2,3$) от двух переменных x и y и ${}_4F_3\left[\begin{matrix}\cdots & x^2\\ \cdots & \end{matrix}\right]$, а также следующее соотношение между функциями Аппеля F_2 и F_4:

$$ (1-x-y)^a F_2[a; b, c; 2b, 2c; 2x, 2y] = $$

$$ = F_4\left[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}; b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2}; \frac{x^2}{(1-x-y)^2}, \frac{y^2}{(1-x-y)^2}\right]. $$

М. Н. Олевский.

3375. Об интегральных аналогах некоторых преобразований уравновешенных базисных гипергеометрических рядов. Агарвал (On integral analogues of certain transformations of well-poised basic hypergeometric series. Agarwal R. P.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 15, 161—167 (англ.)

Отправляясь от так называемого базисного аналога первой леммы Барнса (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ОНТИ, Л.—М., 1934, 2, 74), данного Ватсоном (Watson, G. N., Trans. Cambridge Phil. Soc., 1909, 21, 281—299), автор устанавливает базисный аналог второй леммы Барнса (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, Cambridge Tracts, 1935, § 6). Пользуясь последним, он находит интегральное соотношение между двумя гипергеометрическими рядами базисного типа. В отдельных случаях это соотношение ведет к интегральным представлениям базисных уравновешенных рядов.

Базисный (basic) гипергеометрический ряд

$$ {}_r\Phi_s\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_r;\\ \beta_1, \ldots, \beta_s\end{matrix}\ z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{q,n} \cdots (\alpha_r)_{q,n}}{(q)_{q,n} (\beta_1)_{q,n} \cdots (\beta_s)_{q,n}} z^n, $$

где $(a)_{q,n} \equiv (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})$, $(a)_{q,0} \equiv 1$, называется уравновешенным (well-poised), если $r=s+1$ и $\alpha_1 q = \alpha_2\beta_1 = \ldots = \alpha_{s+1}\beta_s$. Так, в частности, получено интегральное представление следующего базисного уравновешенного ряда:

$$ {}_8\Phi_7\left[\begin{matrix}q^a, & q^{1+\frac{a}{2}}, & -q^{1+\frac{a}{2}}, & q^{\alpha_4}, \ldots, & q^{\alpha_8}\\ q^{a/2}, & -q^{a/2}, & q^{1+a-\alpha_4}, \ldots, & q^{1+a-\alpha_8} & \end{matrix}\ q^b\right], $$

где $b = 2+2a-\alpha_4-\ldots-\alpha_8$.

Последнее дает автору возможность найти интегральный аналог известной теоремы Дугалла (Bailey W. N., § 8) для базисных уравновешенных рядов. *М. Н. Олевский*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3376. Применение однократных и многократных преобразований Фурье к уравнениям в частных производных теоретической электротехники (Сообщение I). Вецгер (Die Anwendung der ein-und mehrstufigen Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen der theoretischen Elektrotechnik (I. Mitteilung). Wetzger Joachim), Frequenz, 1953, 7, № 2, 33—37 (нем.)

Изучаются преобразования Фурье функций $G(x)$, обращающихся в нуль вне конечного интервала $(-b, b)$. Такие преобразования Фурье автор называет конечными.

Пусть

$$ g(\alpha) = \int_{-b}^{b} e^{-i\alpha x} G(x)\, dx = F\{G\}. \qquad (1) $$

Из теоремы единственности для рядов Фурье следует, что для определения функции $G(x)$ достаточно задать функцию $g(\alpha)$ в точках $\alpha = n\frac{\pi}{b}$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Рассматривается операция свертки для конечных преобразований Фурье и при помощи интегрирования по частям доказывается несколько простых теорем, например:

Если $G(x)$ в интервале $-b<x<b$ дифференцируема и в точках $x=\pm b$ непрерывна, а $G'(x)$

интегрируема, то

$$F\{G'\} = in\frac{\pi}{b} F\{G\} + (-1)^n [G(b) - G(-b)],$$

где $F\{G\}$ определяется формулой (1) при $\alpha = n\pi/b$.

Рассматриваются также конечные преобразования Фурье для функций от двух переменных (см. реф. 3377). *Б. М. Левитан*

3377. Свойства конечных трехкратных и конечных k-кратных преобразований Фурье (Сообщение II). Вецгер (Die Eigenschaften der endlichen dreistufigen und der endlichen k-stufigen Fourier-Transformation (II. Mitteilung). Wetzger Joachim), Frequenz, 1953, **7**, № 3, 61—63 (нем.)

Изучаются конечные преобразования Фурье для функций трех и большего числа переменных.

Пусть

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = F\{G\} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)} G(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \quad (1)$$

Из теоремы единственности для рядов Фурье следует, что функцию g достаточно задавать в точках $\alpha = l\frac{\pi}{a}$, $\beta = m\frac{\pi}{b}$, $\gamma = n\frac{\pi}{c}$, где l, m, n — целые числа. Автор изучает свертку для конечных преобразований Фурье и доказывает несколько простых теорем, например:

Пусть $G(x, y, z)$ в параллелепипеде $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$ имеет интегрируемую производную $\frac{\partial G}{\partial x}$. Далее, пусть существуют пределы

$$\lim_{x \to \pm a} G(x, y, z) = G(\pm a, y, z)$$

и пусть функции $G(\pm a, y, z)$ интегрируемы. Тогда

$$F\{G_x\} = il\frac{\pi}{a} F\{G\} + (-1)^l \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} e^{-im\frac{\pi}{b}y - in\frac{\pi}{c}z} \times$$

$$\times \{G(a, y, z) - G(-a, y, z)\}\, dy\, dz,$$

где $F\{G\}$ определяется формулой (1) при $\alpha = n\pi/a$.

Автор намеревается применить эти результаты к уравнениям в частных производных теории теплопроводности. *Б. М. Левитан*

См. также: 3209, 3277, 3287, 3289, 3292, 3300, 3306, 3332, 3342, 3346 К, 3378, 3471

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3378. О некоторых интегральных преобразованиях. Татчелл (On some integral transformations. Tatchell J. B.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 11, 257—266 (англ.)

Пусть L — класс суммируемых на $[0, \infty)$ функций, а V — класс функций, имеющих на $[0, \infty)$ ограниченную вариацию. Доказываются следующие три теоремы:

Теорема 1. Для того чтобы преобразование

$$\alpha_s(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)\, ds(t)$$

определяло на $[0, \infty)$ функцию $\alpha_s(x) \in L$, какова бы ни была функция $s(t) \in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\varphi(x, t)$ — непрерывная и ограниченная на $[0, \infty)$ функция переменной t при любом фиксированном $x \geqslant 0$;

2) $\varphi(x, t)$ — измеримая на $[0, \infty)$ функция переменной x при любом фиксированном $t \geqslant 0$;

3) $\int_0^\infty |\varphi(x, t)|\, dx \leqslant H = \text{const}$ для всех $t \geqslant 0$

Теорема 2. Для того чтобы преобразование

$$\beta_v(x) = \int_0^\infty \chi(x, t)\, v(t)\, dt$$

определяло на $[0, \infty)$ функцию $\beta_v(x) \in L$, какова бы ни была функция $v(t) \in L$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\chi(x, t)$ — измеримая и почти всюду ограниченная на $[0, \infty)$ функция переменной t при любом фиксированном $x \geqslant 0$;

2) $\int_0^t \chi(x, y)\, dy$ — измеримая на $[0, \infty)$ функция переменной x при любом фиксированном $t \geqslant 0$.

3) для всех $t \geqslant 0$ интеграл $\int_0^\infty \chi_*(x, t)\, dx \leqslant H = \text{const}$,

где

$$\chi_*(x, t) = \lim_{\eta \to 0} \left| \frac{1}{\eta} \int_t^{t+\eta} \chi(x, y)\, dy \right|.$$

Теорема 3. Для того чтобы преобразование

$$\gamma_s(x) = \int_0^\infty \psi(x, t)\, ds(t)$$

определяло на $[0, \infty)$ функцию $\gamma_s(x) \in V$, какова бы ни была функция $s(t) \in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\psi(x, t)$ — непрерывная и ограниченная на $[0, \infty)$ функция переменной t при любом фиксированном $x \geqslant 0$;

2) $\int_0^\infty |d_x \psi(x, t)| \leqslant H = \text{const}$ для всех $t \geqslant 0$.

Достаточность условий теоремы 1 была установлена иначе в статье Кнопа и Лоренца (Knopp K., Lorentz G., Arch. Math., 1949, 2, 10—16). Ограничиваясь ядрами $\chi(x, t)$, являющимися измеримыми

функциями двух неотрицательных переменных x и t, Суноути и Цутикура (Sunouchi G., Tsuchikura T., Tôhoku Math. J., 1952, 4, 153—156) доказали теорему, аналогичную теореме 2.

Автор дает обобщение использованных им двух лемм применительно ко всякому преобразованию, которое можно рассматривать как отображение некоторого банахова пространства в банахово пространство B функций $p(x)$, обладающее свойством: если $p_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ и $p_*(x)=\varlimsup_{n\to\infty} p_n(x)$ — элементы B, то

$$\| p_*(x)\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \| p_n(x)\|$$

(это свойство является аналогом известной леммы Фату для интегралов Лебега). *В. М. Даревский*

3379. Об основах теории аналитических функционалов. Себаштьян-и-Силва (Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici. Sebastião e Silva J.), Portug. math., 1953, 12, 1—47 (итал.)

В этой работе автор продолжает свои исследования по теории аналитических функционалов (Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1946, 1, 709—715; Portug. math., 1950, 9, 1—130; Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. Ci. Mat., 1950, 1, 23—102).

В значительной части данная работа посвящена развитию и дополнению предыдущих работ автора в свете работы Силва-Диаса (da Silva Dias C. L., São Paolo thesis, 1951), некоторых пока неопубликованных исследований Кёте (G. Köthe) по вопросам двойственности в теории функций и работы Дьёдонне и Шварца (Dieudonné, Schwartz) по теории двойственности в линейных топологических пространствах (Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1950, 1, 61—101). В работе рассматриваются следующие вопросы: топологические вопросы в функциональных пространствах, аналитическое продолжение функциональных операторов, непрерывность операторов аналитических в смысле Фантаппие (Fantappié), теоремы сходимости для линейных операторов и различные другие проблемы, относящиеся к линейным операторам, отображающим одно пространство аналитических функций в другое пространство того же типа.

Некоторые из полученных результатов лишь открывают пути для дальнейших исследований. Особо подчеркивается ценность современной абстрактной точки зрения. *Тейлор (A. E. Taylor)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 656.

3380. Об одном неравенстве Э. Хейнца. Диксмье (Sur une inégalité de E. Heinz. Dixmier J.), Math. Ann., 1953, **126**, № 1, 75—78 (франц.)

Неравенство Хейнца (Heinz E., Math. Ann., 1951, **123**, 415—438) для билинейной формы (Qx, y) в гильбертовом пространстве H обобщается на полилинейные формы.

Пусть A и B — неотрицательные самосопряженные операторы в H, а Q — линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий при любом $x\in H$ условиям $\| Qx\| \leqslant \| Bx\|$ и $\| Q^*x\| \leqslant \| Ax\|$. Неравенство Хейнца имеет вид

$$|(Qx, y)| \leqslant (1+|2p-1|)\,\| B^p x\|\cdot\| A^{1-p} y\|, \quad (1)$$

где x, y любые элементы H, а $p\geqslant 0$ любое число, не превосходящее единицы; при $Q^*=Q$ множитель $(1+|2p-1|)$ может быть опущен. Обобщение неравенства (1) на полилинейные формы дает следующая теорема:

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ $(n<\infty)$ — гильбертовы пространства, A_m — неотрицательный самосопряженный оператор в H_m $(m=1,2,\ldots,n)$ и $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полилинейная форма n переменных $(x_m\in H_m,\ m=1,2,\ldots,n)$, удовлетворяющая системе n неравенств

$$|F(x_1,x_2,\ldots,x_n)| \leqslant \| A_1x_1\|\cdot\| x_2\|\cdots\| x_n\|$$
$$|F(x_1,x_2,\ldots,x_n)| \leqslant \| x_1\|\cdot\| A_2x_2\|\cdots\| x_n\|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|F(x_1,x_2,\ldots,x_n)| \leqslant \| x_1\|\cdot\| x_2\|\cdots\| A_nx_n\|;$$

если $p_1, p_2, \ldots, p_n\geqslant 0$ и $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$, то

$$|F(x_1,x_2,\ldots,x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \| A_1^{p_1}x_1\|\cdot\| A_2^{p_2}x_2\|\cdots\| A_n^{p_n}x_n\|. \quad (2)$$

Если положить $H_1=H$, а в качестве H_2 принять то же многообразие H с установленной там операцией сложения, но с произведением скаляра λ на элемент x по формуле λx и скалярным произведением x на y по формуле (y, x), то из (2) получим (1) и притом в уточненной форме: множитель $(1+|2p-1|)$ оказывается опущенным и при $Q^*\neq Q$ (это уточнение указано также Като в Math. Ann., 1952, 125, 208—212).

В основу доказательства неравенства (2) положена теорема, устанавливающая логарифмическую выпуклость функции $M(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ от неотрицательных переменных $r_1, r_2, \ldots, r_n$, определенной как $\sup |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ при n связях $\| A_m^{r_m}x_m\| \leqslant 1$ $(x_m\in H_m, H_m$ конечномерно, $A_m\geqslant 0$, $m=1,2,\ldots,n)$. Доказательство этой теоремы основано на лемме о выпуклости, являющейся следствием одного из обобщений теорем М. Рисса и Ж. Адамара, данных Торином (Thorin G. O., Commun. séminaire math. Univ. Lund, 1948, 9, 58 pp.). В конце статьи автор, следуя Тамаркину и Зигмунду (Tamarkin J. D., Zygmund A., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 279—282), приводит элементарное доказательство леммы о выпуклости. *И. М. Глазман*

3381. Некоторые расширения «принципа Релея». Саутуэлл (Some extensions of «Rayleigh's principle». Southwell R. V.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 3, № 3, 257—272 (англ.)

Исследуется уравнение

$$\vartheta w-\lambda\vartheta' w=0, \quad (1)$$

где ϑ и ϑ' — симметричные операторы, первый из которых положителен. Предполагается, что любая допустимая функция разлагается в ряд по собственным функциям этого уравнения. Для определенности записи принимается, что w зависит от двух переменных.

Положим

$$I=\iint w\vartheta w\,dx\,dy, \qquad I'/\Lambda=\iint w\vartheta' w\,dx\,dy,$$

где w — допустимая функция и Λ — произвольно выбранное число. Автор называет «принципом Релея» теорему, по которой наименьшее собственное число λ_1 уравнения (1), если эти числа положительны, равно минимуму отношения $\lambda_R(w) = \Lambda I / I'$. Значение λ_R, вычисленное для любой допустимой функции, дает верхнюю границу для λ_1. Чтобы улучшить эту границу, предлагается воспользоваться процессом «интенсификации», который состоит в построении функций $w_{\mathrm{I}}, w_{\mathrm{II}}, \ldots$ из уравнений $\vartheta w_{\mathrm{I}} = \Lambda \vartheta' w$, $\vartheta w_{\mathrm{II}} = \Lambda \vartheta' w_{\mathrm{I}}, \ldots$ Доказывается, что $\lambda_R(w_{\mathrm{I}}) \leqslant \lambda_R(w)$. Предлагается еще прием дальнейшего улучшения оценки верхней границы числа λ_1: полагаем $w_\gamma = w + \gamma w_{\mathrm{I}}$ и определяем значение γ, при котором $\lambda_R(w_\gamma)$ достигает минимума; этот минимум и дает улучшенную верхнюю границу. Заметим, что этот прием совпадает с методом Ритца, если, применяя последний, взять w и w_1 в качестве координатных функций.

В случае, когда некоторые из собственных чисел уравнения (1) отрицательны, автор приводит доказательство ранее неопубликованной теоремы Уэйси: λ_R не принимает значений, расположенных между λ_{-1} и λ_1, где λ_{-1} — наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное число уравнения (1).

Полагая

$$I'' = \iint w_{\mathrm{I}} \vartheta w_{\mathrm{I}}\, dx\, dy,$$

где w_{I} получено из w «интенсификацией», автор вводит величину $\mu_S^2(w) = \Lambda^2 I / I''$, относительно которой доказывает, что:

$$1)\ \mu_S^2 \geqslant \min(\lambda_1^2, \lambda_{-1}^2);$$

$$2)\ \mu_S^2(w_{\mathrm{I}}) \leqslant \mu_S^2(w); \quad 3)\ \mu_S^2 \leqslant \lambda_R^2.$$

Наконец, из теоремы Уэйси выводится следствие: некоторое собственное число уравнения (1) заключено между числами $\Lambda(1+\varepsilon-\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2})$ и $\Lambda(1+\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2})$, где ε определяется соотношением $2(1+\varepsilon) = (I+I'')/I'$. Сходное следствие получается также при помощи принципа Релея: некоторое собственное число уравнения (1) лежит между упомянутыми выше числами, но ε определяется на этот раз из уравнения $4(1+\varepsilon)^2 = (I + 2I'' + I^{\mathrm{IV}})/I''$, где

$$I^{\mathrm{IV}} = \iint w_{\mathrm{II}} \vartheta w_{\mathrm{II}}\, dx\, dy$$

и $1+\varepsilon$ считается положительным. Результаты иллюстрируются на примере уравнения $d^2w/dx^2 + \lambda w = 0$. *С. Г. Михлин*

3382. Интерпретация причинности и нелинейность волновой механики. Бройль (Sur l'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire. Broglie Louis de), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 7, 441—444 (франц.)

Автор в самых общих чертах предлагает следующую концепцию нелинейной волновой механики: волновая функция частицы может быть представлена в форме

$$u = u_0 + v,$$

где u_0 — «сингулярная часть», заметно отличающаяся от нуля в малой области, окружающей частицу, и удовлетворяющая нелинейному уравнению движения; v — «регулярная часть», подчиняющаяся линейному уравнению и не имеющая особенности. На больших расстояниях от частицы функция u просто связана с обычной волновой функцией частицы Ψ, а именно: $u \simeq v \cong C\Psi$, где C — некоторая константа. Обсуждаются некоторые общие следствия из предлагаемой концепции (связанные, в частности, с интерпретацией причинности). Конкретных результатов в работе нет. *Ю. А. Гольфанд*

См. также: 3245, 3246, 3247, 3280, 3295, 3302, 3319, 3320, 3321, 3327, 3328, 3350

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3383. К обоснованию теории вероятностей. Рихтер (Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Richter Hans), Math. Ann., 1953, **126**, № 4, 362—374 (нем.)

3384. О геометрической интерпретации вероятности эквивалентных событий. Дабони (Aspetti di una interpretazione geometrica per le probabilità di eventi equivalenti. Daboni Luciano), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 1—2, 145—165 (итал.)

Указанная Финетти (Finetti B. de, Giorn. Istit. Ital. Attuari, 1952, **15**, № 1—2, 40—64) геометрическая иллюстрация схемы эквивалентных событий рассматривается в деталях при различных предположениях относительно предельного закона распределения частот (как известно, этим предельным законом $F(x)$ данная схема эквивалентных событий определяется однозначно). Основная часть работы посвящена случаю дискретного распределения $F(x)$, где получаемая геометрическая картина исследуется во всех основных чертах. После этого даются некоторые указания, связанные со случаем, когда функция $F(x)$ дифференцируема. *А. Я. Хинчин*

3385. Число циклов в элементах группы перестановок. Гринвуд (The number of cycles associated with the elements of a permutation group. Greenwood R. E.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 6, 407—409 (англ.)

В одной из работ (Изв. АН СССР, сер. мат., 1944, 8, № 1, 1—43) референт произвел систематическое теоретико-вероятностное исследование распределения циклов с тем или иным числом членов в перестановках из n элементов, причем вспомогательным средством явилась особая «основная» производящая функция от неопределенного числа переменных

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = e^{\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots}$$

С ее помощью могла быть определена вероятность того, что данная перестановка содержит α_r циклов

порядка r ($r = 1, 2, \ldots$); как частный результат были указаны три метода определения вероятности того, что перестановка содержит m циклов ($1 \leqslant m \leqslant n$), причем для этой цели при помощи основной производящей функции были построены три специальные производящие функции.

Автор заметки, оставляя в стороне вопрос о «членности» циклов, путем непосредственного рассмотрения перестановок и с применением метода индукции получает одну из специальных производящих функций (третью). Ссылка на первоисточник приведена. *В. Л. Гончаров*

3386. Вероятностные методы для численного решения некоторых задач анализа и алгебры. Вазов (Metodi probabilistici per la risoluzione numerica di alcuni problemi di analisi e di algebra. Wasow Wolfgang), Univ. Roma ist. naz. alta mat. rend. mat. e appl., 1953, **11**, 336—346 = Consiglio naz. ricerche. Pubbl. ist. appl. calcolo, 1953, № 354 (итал.).

Краткое описание метода с особенным вниманием к приложениям к эллиптическим уравнениям в частных производных и к обращению матриц.

Хаусхолдер (A. S. Householder)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1018.

3387. О роли максимального слагаемого при суммировании независимых случайных величин. Гнеденко Б. В., Украинский мат. ж., 1953, **5**, № 3, 291—298

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же функцию распределения $F(x)$,

$$\eta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\xi_k\}, \quad \zeta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|\xi_k|\},$$

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Изучается связь между порядком роста при $n \to \infty$ суммы s_n, с одной стороны, и порядком роста величин η_n и ζ_n — с другой. Устанавливается (теорема 3), что если при некоторых A_n и $B_n > 0$ имеет место сходимость

$$P(s_n - A_n < xB_n) \to G(x), \qquad (1)$$

где $G(x)$ — устойчивая функция распределения с показателем α ($0 < \alpha < 2$), то распределения величин ζ_n / B_n и η_n / B_n сходятся к собственным предельным распределениям типа

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Отсюда выводится, что при условии (1)

$$P\{s_n - A_n < x\zeta_n\} \to \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — некоторая собственная функция распределения.

В предположении, что величины ξ_n неотрицательны и $\alpha \neq 1$, характеристическая функция распределения $\Phi(x)$ была вычислена Дарлингом (Darling D. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, № 1, 95—107). *Ю. В. Прохоров*

3388. Обобщение теоремы восстановления. Блэкуэлл (Extension of a renewal theorem. Blackwell David), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 315—320 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_i = m$, причем $0 < m \leqslant +\infty$, и пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Если величины ξ_i имеют решетчатое распределение с максимальным шагом d и если U_k обозначает математическое ожидание количества номеров $n \geqslant 0$, при которых $S_n = kd$, то $U_k \to \frac{d}{m}$ при $k \to +\infty$ и $U_k \to 0$ при $k \to -\infty$. Если величины ξ_i имеют нерешетчатое распределение и $U(a, a+\Delta)$ означает математическое ожидание количества номеров $n \geqslant 0$, при которых $a \leqslant S_n < a + \Delta$, то $U(a, a+\Delta) \to \frac{\Delta}{m}$ при $a \to +\infty$ и $U(a, a+\Delta) \to 0$ при $a \to -\infty$.

Этой теоремой подводится итог серии частных результатов различных авторов. В частности, если величины ξ_i дискретны и неотрицательны, то теорема сводится к эргодической теореме А. Н. Колмогорова для счетных цепей Маркова (Бюлл. Моск. гос. ун-та, 1937, **A1**, № 3, 1—16). Для произвольных неотрицательных ξ_i она была доказана впервые автором (Blackwell D., Duke Math. J., 1948, **15**, 145—151). Доказательство, приводимое в статье, ново по идее и состоит в том, что при помощи простых вероятностных соображений задача сводится к случаю неотрицательных ξ_i.

Отметим следующую лемму: пусть ν — наименьшее целое n, при котором $S_n > 0$ и $\zeta = S_\nu$; тогда, в условиях теоремы, $M\nu < \infty$ и $M\zeta = m \cdot M\nu$ (в том числе и при $m = +\infty$). *Р. Л. Добрушин*

3389. О многомерной теореме восстановления. Чжун Гай-лай (On the renewal theorem in higher dimensions. Chung Kai Lai), Skand. Aktuarietidskr., 1952, **35**, 188—194 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Для любой последовательности независимых одинаково распределенных r-мерных векторов $V_1, V_2, \ldots$ ($r > 1$), любого ограниченного множества C r-мерного пространства и любого r-мерного вектора U математическое ожидание числа сумм $V_1 + \ldots + V_n$, лежащих в множестве $C + U$ (получаемом из множества C сдвигом на U), стремится к нулю при $|U| \to \infty$. *Блэкуэлл (D. Blackwell)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 994.

3390. Об одном классе проблем, связанных со случайным разбиением отрезка. Дарлинг (On a class of problems related to the random division of an interval. Darling A. D.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 239—253 (англ.).

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — n независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$; $Y_0, \ldots, Y_n$ — длины сегментов, на которые точки X_i разбивают этот отрезок.

В работе изучаются распределения величин $W_n = \sum_{j=0}^{n} h_j(Y_j)$, где $h_j(x)$ — данный набор функ-

ций. Эти распределения совпадают с распределениями статистик

$$\sum_{j=0}^{n} h_j(F(x_{j+1}) - F(x_j))$$

(где $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, $x_1, \ldots, x_n$ — расположенные в порядке возрастания результаты n независимых наблюдений случайной величины, имеющей непрерывную функцию распределения $F(x)$) и могут служить для построения различных критериев согласия. Распределение величины W_n с $h_j(x) = x^2$ рассматривали Гринвуд (Greenwood M., J. Roy. Statist. Soc., 1946, 109, 85—110). Кимбалл (Kimball B. F., Ann. Math. Statistics, 1947, 18, 540—548) и Моран (Moran P. A. P., J. Roy. Statist. Soc. Suppl., 1947, 9, 92—98; J. Roy. Statist. Soc., 1951, B13, 147; РЖМат, 1954, 3019). Случай $h_j(x) = \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{n+1}\right|$ исследовал Шерман (Sherman B., Ann. Math. Statistics, 1950, 21, 339—361). Близкие вопросы затронуты также Рамакришнаном (РЖМат, 1954, 3018).

Основой реферируемой работы служит следующая теорема об интеграле, обобщающем классический интеграл Дирихле: если $f_0(x), \ldots, f_n(x)$ — функции вещественного переменного с абсциссами сходимости преобразований Лапласа, меньшими c, то

$$M[f_0(Y_0)\ldots f_n(Y_n)] = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z \prod_{j=0}^{n}\int_0^\infty e^{-r_j z} f_j(r_j)\, dr_j\, dz \qquad (1)$$

(интеграл берется вдоль прямой $\mathrm{Re}\, z = c$).

При $f_j(Y_j) = \exp it_j Y_j$ из (1) получается характеристическая функция совместного распределения Y_j

$$Me^{it_0Y_0 + \cdots + it_nY_n} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{it_j}}{\prod_{k=j} (it_j - it_k)}$$

$$(n \geqslant 1, \quad t_j \neq t_k). \qquad (2)$$

При $f_j(Y_j) = \exp ith_j(Y_j)$ (1) дает характеристическую функцию величины W_n, для случая $h_j(x) = h(x)$ принимающую вид

$$Me^{itW_n} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z \left(\int_0^\infty e^{-rz + ith(x)}\, dx\right)^{n+1} dz. \qquad (3)$$

Исходя из (3), автор находит формулы для первых двух моментов W_n, а также получает результаты для различных конкретных функций $h(x)$.

В случае $h(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$) W_n распределена асимптотически нормально с параметрами

$$\mu_n \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha-1}} \text{ и } \sigma_n^2 \sim \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \times$$

$$\times [\Gamma(2\alpha+1) - (\alpha^2+1)\Gamma^2(\alpha+1)].$$

В случае

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha < x < \beta \\ 0 \text{ при } x \leqslant \alpha,\ x \geqslant \beta \end{cases}$$

обозначим $W_n = N_n(\alpha, \beta)$. Тогда: а) величина $N_n\left(\frac{a}{n+1}, \frac{b}{n+1}\right)$ асимптотически нормальна с параметрами $\mu_n \sim (n+1)(e^{-a} - e^{-b})$ и $\sigma_n^2 \sim (n+1) \times$ $\times [e^{-a} - e^{-b} - (ae^{-a} - be^{-b})^2]$; б) величины

$$N_n\left(\frac{a}{(n+1)^2}, \frac{b}{(n+1)^2}\right)$$

и

$$N_n\left(\frac{\ln(n+1)+a}{n+1}, \frac{\ln(n+1)+b}{n+1}\right)$$

имеют в пределе распределение Пуассона с параметрами соответственно $b-a$ и $e^{-a} - e^{-b}$.

Получено также точное совместное распределение величин

$$U_n = \min_{0 \leqslant j \leqslant n} Y_j \text{ и } V_n = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} Y_j$$

(точные частные распределения U_n и V_n и предельное совместное распределение были известны уже давно). Для случаев $h(x) = \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{n+1}\right|$ (Шерман) и $h(x) = \ln x$ выведены точные распределения W_n и доказана асимптотическая нормальность. Наконец, при $h(x) = \frac{1}{x}$ распределение W_n сходится (после нормировки) к устойчивому закону с характеристическим показателем единица.

Доказательство общей теоремы об асимптотической нормальности, аналогичной центральной предельной теореме, представляется автору чрезвычайно трудным. Интересно поставить и более широкую задачу: найти все возможные предельные законы для W_n и необходимые и достаточные условия сходимости к этим законам. *А. А. Юшкевич*

3391. Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний. Добрушин Р. Л., Мат. сб., 1953, **33** (75), № 3, 567—596

Изучаются общие решения матричного уравнения

$$P(s, t)\, P(t, u) = P(s, u), \quad s < t < u,$$

где $P(s, t)$ — стохастическая матрица.

Определения. Под интервалами Δ будем понимать открытые, полуоткрытые, замкнутые интервалы и точки основного отрезка $[a, b]$. Рассматриваются функции интервала (ф. и.), значениями которых являются матрицы порядка r.

Ф. и. $P(\Delta)$ называется мультипликативной, если $P(\Delta) = P(\Delta_1)\, P(\Delta_2)$, где $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, Δ_1 лежит левее Δ_2, и если $P(\Lambda) = E$, где Λ — пустое множество и E — единичная матрица.

Определим норму матрицы Q, положив $\|Q\| = r \max_{i,j} |q_{ij}|$, где r — порядок матрицы.

Ф. и. $Q(\Delta)$ обладает свойством N, если $Q(\Delta_i) \to Q(\Lambda)$ для любой последовательности $\{\Delta_i\}$, $\Delta_i \supseteq \Delta_{i+1}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \Lambda$; она имеет ограниченную вариацию, если $\sum_{i=1}^{n} \|Q(\Delta_i) - Q(\Lambda)\| < C$, для лю-

бого разбиения отрезка $[a, b]$. Аналогично определяется абсолютная непрерывность.

Аддитивным (мультипликативным) интегралом мультипликативной (аддитивной) ф. и. $P(\Delta)$ ($B(\Delta)$) на интервале Δ называется предел, если он существует, суммы $\sum_{i=1}^{n} [P(\Delta_i) - E]$ (соответственно произведения $\prod_{i=1}^{n} [E + B(\Delta_i)]$) при условии, что наибольшая из длин интервалов Δ_i стремится к нулю.

Матрица $\{b_{ij}\}$ называется инфинитезимально-стохастической, если $\sum_{j=1}^{r} b_{ij} = 0$ и $b_{ij} \geqslant 0$, $i \neq j$, $b_{ii} \leqslant 0$.

Основные результаты. Если $P(\Delta)$ ($B(\Delta)$) — мультипликативная (аддитивная) ф. и. ограниченной вариации со свойством N, то ее аддитивный (мультипликативный) интеграл $\widetilde{B}(\Delta)$ ($\widetilde{P}(\Delta)$) существует на любом Δ, аддитивен (мультипликативен), имеет ограниченную вариацию и обладает свойством N. При этом, если положить $B(\Delta) = \widetilde{B}(\Delta)$ ($P(\Delta) = \widetilde{P}(\Delta)$), то

$$\widetilde{P}(\Delta) = P(\Delta)\ (\widetilde{B}(\Delta) = B(\Delta)).$$

Если $P(\Delta)$ — стохастическая ф. и., то $\widetilde{B}(\Delta)$ — инфинитезимально-стохастическая ф. и. и обратно.

Если $P(\Delta)$ ($B(\Delta)$) абсолютно непрерывна, то $\widetilde{B}(\Delta)$ ($\widetilde{P}(\Delta)$) также абсолютно непрерывна. Для абсолютно непрерывной ф.и. $P(\Delta)$ почти всюду существуют пределы

$$A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, t+\Delta t) - E}{\Delta t},$$

$$\widetilde{A}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widetilde{B}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

(в формуле 70, стр. 592, опечатка) и $A(t) = \widetilde{A}(t)$.

В каждой точке t, в которой существует $A(t)$, имеет место уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = P(s, t)\, A(t).$$

И. И. Гихман

3392. О «переходных вероятностях», соответствующих любому распределению числа происшествий. Эруин (On the «transition probabilities» corresponding to any accident distribution. Irwin J. O.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, B15, № 1, 87—89 (англ.)

Пусть $p_k(T)$, $k = 0, 1, \ldots$ — распределение вероятностей для числа происшествий, испытанных некоторым объектом за время T. Автор называет «переходными вероятностями» величины

$$\overline{a}_r = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} a_r(T),$$

где

$$a_r(T) = \sum_{i=r}^{\infty} p_i(T)\,(i-r)\,A_i^r \Bigg/ \sum_{i=r}^{\infty} p_i(T)\,A_i^r$$

и $A_i^r = i(i-1)\ldots(i-r+1)$, и затем находит эти величины для некоторых распределений, употребляемых в статистике происшествий.

Р. Л. Добрушин

3393. О независимых функциях. X. Равнораспределенность молекул в сосуде кубической формы. Штейнхаус (Sur les fonctions indépendantes. (X). (Equipartition de molécules dans un récipient cubique). Steinhaus H.), Studia math., 1953, **13**, № 1,1—17 (франц.)

Рассматриваются измеримые множества и измеримые функции на временной полупрямой $0 \leqslant t < +\infty$. Множество E относительно измеримо, если существует его относительная мера

$$|E|_R = \lim_{T \to +\infty} T^{-1} |E[0, T]|.$$

Множества E_j ($j = 1, \ldots, m$) независимы, если $|\prod G_j|_R = \prod |G_j|_R$, где каждое G_j есть E_j или CE_j. Функция $f(t)$ относительно измерима, если множества $E\{t : f(t) \in I\}$, где I — любой интервал, относительно измеримы. Функции $f_j(t)$ ($j = 1, \ldots, m$) независимы, если множества $F\{t : f_j(t) \in I_j\}$, где I_j — любые интервалы, независимы.

Действительные числа ρ_j ($j = 1, \ldots, m$) арифметически независимы, если из $\sum_{1}^{m} c_j \rho_j = 0$, где c_j целые, следует $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Дистрибутрисса относительно измеримой функции $f(t)$ есть функция $F(\alpha) = |E\{t : f(t) < \alpha\}|_R$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

R-среднее относительно измеримой функции $f(t)$ есть $M_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\, dF(\alpha)$, если интеграл существует.

B-среднее измеримой функции $f(t)$ есть $M_B(f) = \lim_{T \to +\infty} T^{-1} \int_0^T f(t)\, dt$, если предел существует. Для ограниченной относительно измеримой функции $M_R(f) = M_B(f)$.

Если $3n$ чисел λ_k, μ_k, ν_k ($k = 1, \ldots, n$) арифметически независимы, то $3n$ функций

$$\left.\begin{aligned} x_k(t) &= \frac{2}{\pi} \arcsin(-\cos \pi\lambda_k (t - \tau_k')) \\ y_k(t) &= \frac{2}{\pi} \arcsin(-\cos \pi\mu_k (t - \tau_k'')) \\ z_k(t) &= \frac{2}{\pi} \arcsin(-\cos \pi\nu_k (t - \tau_k''')) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

независимы (τ — произвольны).

Формулы (1) описывают движение системы n материальных точек P_k, находящихся в кубе $V(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1)$ и отражающихся от его стенок по классическому закону, без действия на P_k каких-либо сил.

Пусть $S(t)$ — число точек системы, находящихся в момент t в параллелепипеде $v(\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \vartheta \leqslant y \leqslant \delta,\ \varepsilon \leqslant z \leqslant \zeta)$, с относительным объемом $p = v/V$, и пусть $S_{\eta_1}^{\eta_2} = E\{t : \eta_1 \leqslant S(t) \leqslant \eta_2\}$; тогда

$$|S_{\eta_1}^{\eta_2}|_R = \sum_{\eta_1 \leqslant h \leqslant \eta_2} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} \quad (0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant n),$$

где $q = 1 - p$. Выражение через интеграл Лапласа и использование оценки Успенского (Uspensky I. V., Introduction to mathematical probability, McGraw Hill Book Co., New York and London, 1937, 130) при $\eta_1 = np - \gamma\sqrt{npq}$, $\eta_2 = np + \gamma\sqrt{npq}$, $0 < \gamma < \sqrt{np/q}$, $npq \geqslant 25$, дает

$$|S_{\eta_1}^{\eta_2}|_R = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \Delta;$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} + \frac{0{,}20 + 0{,}25|p-q|}{npq} + e^{-\frac{3\sqrt{npq}}{2}}.$$

Далее рассматривается аналогичная механическая модель, но с ослабленными требованиями независимости: каждые шесть чисел λ_j, μ_j, ν_j, λ_k, μ_k, ν_k $(j \neq k)$ предполагаются арифметически независимыми. Тогда $M_B\left(\frac{S(t)}{n} - p\right)^2 = \frac{pq}{n}$. «Молекулы» рассматриваемой модели суть материальные точки, не имеющие по предположению столкновений. Можно эффективно выбрать начальные положения и начальные скорости, гарантирующие отсутствие столкновений. Можно также показать, что при произвольных начальных положениях почти все начальные скорости гарантируют отсутствие столкновений.

Содержание работы тесно связано с работами IV и VII той же серии. С работой VII связано также построение механической модели Эгервари и Турана (Egerváry E., Turán P., Studia math. 1951, 12, 170—180), отличной от рассмотренной.

П. И. Романовский

3394. Наложение нескольких строго периодичных последовательностей событий. Кокс, Смит (The superposition of several strictly periodic sequences of events. Cox D. R., Smith W. L.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 1—11 (англ.)

Рассматривается последовательность событий, происходящих от объединенного действия N строго периодических источников с периодами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$; $\theta_1 > \theta_2 > \ldots > \theta_N$. События от i-го источника происходят в моменты $n\theta_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$; изучается распределение отвечающих им всем точек на оси времени $t > 0$. Такие положения; по утверждению авторов, встречаются в психологии, когда изучается реакция организма на несколько периодических возбудителей (Conrad R., Brit. J. Industr., Med., 1951, 8, 1), и нейропсихологии (Fatt P., Katz B., J. Physiol., 1952, 117, 109).

Предполагается, что θ_i линейно независимы в поле рациональных чисел. Из теории чисел известно, что N-компонентный вектор $(\{n\theta_1\}, \{n\theta_2\}, \ldots, \{n\theta_N\})$ ($\{\ \}$ — знак дробной части) имеет равномерное распределение в N-мерном единичном кубе; так же ведут себя и некоторые другие связанные с ним векторы. Ввиду этого, рассматривая расстояние Y между соседними событиями и подсчитывая предельную частость попадания Y в интервал $(y, y+\delta y)$, получаем аналог закона распределения случайной величины, распределенной на интервале $[0, \theta_N]$ (θ_N — минимальный период). Закон распределения состоит из непрерывной кривой $\int_0^y q(y)\,dy$, где

$$q(y) = \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^N \theta_i^{-1} \sum_{j \neq i} \theta_j^{-1} \prod_{k \neq i,\, j} (\theta_k - y)\,\theta_k^{-1}$$

при $0 \leqslant y \leqslant \theta_N$;

и скачка $Q = \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^{-1}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{N-1} (\theta_k - \theta_N)\,\theta_k^{-1}\theta_N^{-1}$

при $y = \theta_N$.

Среднее $E(Y) = \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^{-1}\right)^{-1}$. Изучается поведение этого распределения при $N \to \infty$ и разных дополнительных предположениях. Полагая

$$z = y\sum_{i=1}^N \chi_i; \quad \chi_i = \theta_i^{-1}; \quad \mu = \left(\sum_{i=1}^N \chi_i\right) N^{-1};$$

$$\mu_s' = \left(\sum_{i=1}^N \chi_i^s\right) N^{-1}$$

и налагая некоторые условия на μ_s'/μ^s при $N \to \infty$, получаем для плотности распределения z выражение

$$r(z) = e^{-z}\left(1 + \frac{O(z^2)}{N}\right).$$

Если θ_N мало сравнительно со средним промежутком, т. е.

$$\lim \chi_N^{-1} \sum_{i=1}^N \chi_i = \infty,$$

то скачок сглаживается и все распределение стремится к непрерывному. Далее изучается распределение числа событий, попадающих в интервал данной длины t (точнее, частость интервалов $(n\alpha, n\alpha + t)$; $n = 1, 2, \ldots$, содержащих предписанное число событий) при α, линейно независимом от $\theta_1, \ldots, \theta_N$ в поле рациональных чисел. При малых $t\chi_i$ получается распределение, характерное для процесса Пуассона. Это дает авторам повод назвать их процесс «локально случайным». Далее вводится «кривая дисперсии», которая сравнивается с аналогичной кривой для процесса Пуассона. Даются рекомендации к построению критерия того, что данная последовательность будет процессом изученного авторами типа. Если N невелико, то надо выделить минимальный период θ_N при помощи скачка частости; отсеяв события соответствующего источника, перейти к следующему по величине периоду и т. п. Авторы предлагают и другой способ, основанный на использовании «кривой дисперсии», и приводят числовые и графические данные.

Ю. В. Линник

3395. Логические взаимоотношения между принципами статистической механики и термодинамики. Томсен (Logical relations among the

principles of statistical mechanics and thermodynamics. Thomsen John S.), Phys. Rev., 1953, сер. 2, **91**, № 5, 1263—1266 (англ.)

Исследуются формально-логические взаимоотношения между математическими формулировками пяти предложений, принимаемых автором в качестве исходных принципов статистической механики в различных ее построениях. Эти предложения таковы: 1) микроскопическая обратимость; 2) принцип детального баланса в состоянии равновесия; 3) эргодическая гипотеза; 4) второй закон термодинамики; 5) одно новое предложение, которое автор называет «гипотезой λ». Все рассуждения относятся к случаю квантовой системы с фиксированной энергией и конечным числом состояний и потому вполне элементарны. Как отмечает сам автор, список рассматриваемых принципов, а также и понимание (математическая формулировка) их в значительной степени произвольны и могут подлежать дискуссии. *А. Я. Хинчин*

3396. Статистика полигонов и полиэдров. Мачинский (Statistique de polygones et de polyèdres. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 21, 1310—1312 (франц.)

3397. Эффект перекрывания при оценке числа бактерий по числу инкубированных колоний. Мак (The effect of overlapping in bacterial counts of incubated colonies. Mack C.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 220—222 (англ.)

За меру загрязненности воздуха бактериями берется обычно число m бактерий, осевших на стандартную пластинку площади A, помещенную в обследуемый объем воздуха. Для определения числа m пластинка инкубируется; в процессе инкубации каждая из бактерий разрастается в колонию бактерий. По окончании опыта подсчитывается число q образовавшихся колоний. Так как некоторые из колоний, образованных разными бактериями, могут в процессе роста слиться, то, вообще говоря, $q < m$. Возникает статистическая задача оценки неизвестного числа m по известному q и известным площадям отдельных колоний $a_1,\ldots, a_q$.

В реферируемой заметке при помощи теоремы Байеса и в предположении, что априори все значения m равновероятны, находится оценка для m: $\overline{m} = \left[\frac{q}{1-r}\right]$, где $r = \frac{(a_1 + \ldots + a_q)}{A}$, и распределение вероятностей апостериори для величины m. Обсуждается асимптотическое поведение этого распределения при больших qr. Даются также некоторые дальнейшие обобщения. *Р. Л. Добрушин*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3398. Линейные формы и статистические критерии. I. Линник Ю. В., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 2, 207—243

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Рассматривается пара линейных форм $L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ и $L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i$ и через Ω_{L_1, L_2} обозначается совокупность всех функций $F(x)$, для которых L_1 и L_2 имеют одинаковые распределения вероятностей. При некоторых условиях, накладываемых на коэффициенты a_i и b_i, доказывается, что Ω_{L_1, L_2} совпадает с нормальным типом распределений. При других, менее ограничительных условиях доказывается, что все распределения из Ω_{L_1, L_2}, имеющие конечный момент определенного порядка, принадлежат к нормальному типу. Помимо этого, устанавливаются некоторые аналитические свойства характеристических функций любых распределений из Ω_{L_1, L_2}. Наиболее существенная часть упомянутых выше условий состоит в определенных требованиях, наложенных на положительные корни целой функции $\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n} (|a_i|^2 - |b_i|^2)$ (ср. РЖМат, 1953, 345). Статистические приложения доказанных теорем должны составить вторую часть работы. [...] *Е. Б. Дынкин*

3399. Линейные формы и статистические критерии. II. (Окончание). Линник Ю. В., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 3, 247—290

Статья содержит окончание доказательства и статистические приложения результатов, сформулированных в первой части (см. реф. 3398). Рекомендуется метод, позволяющий сводить проверку гипотезы о нормальности теоретического распределения вероятностей по выборке $x_1,\ldots, x_N$ к вопросу об однородности некоторых двух выборок, которые строятся по $x_1,\ldots,x_n$ при помощи какой-нибудь пары линейных форм $L_1(x_1,\ldots, x_n)$, $L_2(x_1,\ldots, x_n)$, обладающих тем свойством, что из совпадения их функций распределения следует нормальность x_i. Аналогичное сведение предлагается и для некоторых других сложных гипотез. В заключение дается приложение основного результата работы к выводу закона Максвелла для распределения скоростей молекул. *Е. Б. Дынкин*

3400. К приближению плотности распределения при помощи ее низших моментов. Миттман (Zur Approximation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe ihrer niederen Momente. Mittmann Otfrid M. J.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 1—2, 61—63 (нем.)

Для заданной функции $u(x)$, имеющей в некотором интервале (x_1, x_2) m первых моментов $M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}$, строится «приближающая функция» $W(x)$ с теми же первыми m моментами вида

$$W(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i H(x) W_i(x),$$

где $H(x)$ — произвольно выбираемая функция; α_i — коэффициенты, определяемые при помощи равенств

$$\int_{x_1}^{x_2} x_i W(x)\, dx = M_i;$$

$W_i(x)$ — полиномы, ортогональные на интервале (x_1, x_2) с весом $H(x)$. Прибавляя к $W(x)$ новые

члены вида $\alpha_{m+i}H(x)W_{m+i}(x)$, автор соответственным выбором коэффициентов α_{m+i} добивается того, что «приближающая функция», сохраняя значения первых m моментов, принимает в конечном числе точек заданные значения, или наименее уклоняется от нуля в среднем квадратичном в некотором интервале (x_3, x_4), или то и другое вместе.

С. Х. Сираждинов, В. Г. Винокуров

3401. Оценка отношения численности двух классов, когда один из них является подклассом другого. Элкин (Estimating the ratio between the proportions of two classes when one is a sub-class of the other. Elkin Jack M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 261, 128—130 (англ.)

Рассматривается генеральная совокупность объема N, в которой p_1N предметов имеют характеристику A, из которых в свою очередь p_2N предметов имеют характеристику B. Задача состоит в оценке отношения p_2/p_1 по случайной выборке объема n. Если из двух оценок считать лучшей ту, которая имеет меньший коэффициент вариации, то для больших выборок: а) если p_2 известно, то все же для оценки p_2/p_1 (или p_1/p_2) лучше оценивать обе численности p_1N, p_2N по выборке, если только $p_2 > p_1/(2-p_1)$ (соответственно, если $p_1 < 2p_2/(1+p_2)$); б) если p_1 известно, то для оценки p_2/p_1 (или p_1/p_2) лучше оценивать обе численности p_1N, p_2N по выборке, независимо от значений p_1 и p_2.

И. М. Гихман

3402. Простой способ получения наилучших критических множеств, подобных пространству выборок в одном важном классе сложных гипотез. Рао (A simple method of deriving best critical regions similar to the sample space in tests of an important class of composite hypotheses. Rao K. S.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 231—233 (англ.)

Указывается некоторое упрощение в способе Неймана — Пирсона (Neyman J., Pearson E. S., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1933, A231, 289—337) получения наилучших критических множеств для сложной гипотезы $\sigma_1 = \sigma_2$ в двух выборках из нормальных совокупностей. Предлагаемый автором метод применим также и к другим аналогичным задачам.

Б. А. Севастьянов

3403. О некоторых несмещенных оценках с минимальной дисперсией. Дас (On some minimum-variance unbiassed estimates. Das A. C.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, **4**, № 16, 166—170 (англ.)

Пусть $\varphi(y; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ — плотность вероятности (или, в дискретном случае, вероятность значения y) одномерной или векторной случайной величины η, причем $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — неизвестные параметры. Пусть U_i — определенный на множестве функций от θ_i оператор, перестановочный с операцией интегрирования (в дискретном случае — суммирования) по пространству значений η, причем $U_i\,1 = 0$. Пусть $L_i = U_i\varphi(\eta; \theta_1, \ldots, \theta_k)/\varphi(\eta; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ и $\operatorname{cov}(L_i, L_j) = C_{ij}$. Доказывается, что для существования несмещенной оценки T величины $\Psi(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ необходимо, чтобы уравнения $\sum_{j=1}^{k} c_{ij}t_j = U_i\Psi$; $i = 1, 2, \ldots, k$ были разрешимы относительно $t_1, \ldots, t_k$; при этом дисперсия любой несмещенной оценки не может быть меньше, чем $\sum_{i=1}^{k} t_i U_i \Psi$. Второе из этих утверждений вытекает из неравенства

$$\left[\operatorname{cov}\left(\sum_1^k t_i z_i,\ z_0\right)\right]^2 \leqslant V\left(\sum_1^k t_i z_i\right) V(z_0),$$

где V — дисперсия (в оригинале ошибочно указан обратный знак неравенства).

Пусть η — n-мерный случайный вектор с независимыми нормальными компонентами, имеющими одинаковые дисперсии σ^2, причем математическое ожидание η равно $\sum_{i=1}^{m} p_i\alpha_i$, где α_i — заданные векторы, а p_i — неизвестные параметры. Доказывается, что величина $\Psi = \sum_{i=1}^{m} l_i p_i$, где l_i — заданные числа, имеет несмещенную оценку T тогда и только тогда, когда уравнения $\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i, \alpha_j) q_j = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, разрешимы относительно $q_1, \ldots, q_m$. Этому эквивалентно условие, чтобы выражение $\sum_{i=1}^{m} l_i p_i^0$ принимало одно и то же значение для всех решений p_i^0 нормальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i, \alpha_j)\, p_j^0 = (\alpha_i, \eta).$$

При этом

$$T = \sum_{i=1}^{m} l_i p_i^0 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i, \eta) q_i$$

является несмещенной оценкой для Ψ минимальной возможной дисперсией (равной $\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} l_i q_i$). Для параметра σ^2 несмещенной оценкой является

$$T = (n-s)^{-1}\left[\eta^2 - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i, \eta)\, p_i^0\right].$$

Эта оценка имеет минимальную возможную дисперсию (равную $2\sigma^4/(n-s)$). Здесь s — ранг линейного пространства, натянутого на векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

А. С. Монин

3404. Один класс минимаксных критериев для односторонних сложных гипотез. Аллен (A class of minimax tests for one-sided composite hypotheses. Allen S. G., Jr), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 295—298 (англ.)

Пусть X — случайная величина с плотностью распределения $p(x, \theta) = \omega(\theta)\psi(x)e^{\theta x}$, где θ — параметр, $\psi(x)$ — неотрицательная непрерывная функ-

ция и $\omega(\theta)$ определяется из условия $\int_{-\infty}^{\infty} p(x, \theta)\, dx = 1$.

Ищется минимаксное правило выбора между двумя гипотезами $H_0\{\theta > \theta_0\}$ и $H_1\{\theta < \theta_0\}$ по результатам фиксированного числа наблюдений n (функцией потерь называется функция $w(\theta) \geqslant 0$, характеризующая «убыток» от неправильного выбора гипотезы при значении θ параметра распределения; минимаксной называется такая процедура выбора между двумя гипотезами, при которой максимальный «убыток» при всевозможных априорных распределениях параметра θ минимален).

В рассматриваемом случае без уменьшения общности можно предположить $n = 1$. Доказывается, что процедура, основанная на правиле: H_0 принимается, если $x > k$,— будет минимаксной, если

$$\max_{\theta \geqslant \theta_0} R_1(k, \theta) = \max_{\theta \leqslant \theta_0} R_2(k, \theta),$$

где

$$R_1(k, \theta) = w(\theta) P\{X \leqslant k / \theta\},$$

$$R_2(x, \theta) = w(\theta) P\{X \geqslant k / \theta\}.$$

Рассматривается пример нормального распределения с параметрами $(\theta, 1)$ в предположениях $\theta_0 = 0$, $w(\theta) = |\theta|$. Указывается на возможность обобщения на случай дискретных величин. *И. И. Гихман*

3405. Функция Бейеса без гипотезы. Шефер (Bayes-funktion ohne hypothese. Schäfer Wilhelm), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1953, 5, 70—74 (нем.)

Автор обсуждает и поддерживает понятия доверительного распределения (fiducial distribution) и правдоподобия (likelihood), первоначально развитые Фишером (Fisher R. A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 528—535). Он дает приближенное и точное доверительные распределения для параметра p биномиального распределения и получает на основе каждого из них обычную оценку наибольшего правдоподобия для p. *Наш (S. W. Nash)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 889.

3406. Замечания к методу стохастической итерации. Шметтерер (Bemerkungen zum Verfahren der stochastischen Iteration. Schmetterer L.), Österr. Ingr-Arch., 1953, 7, № 2, 111—117 (нем.)

Пусть $F(y, x)$ — функция распределения случайной величины η ($-\infty < x < +\infty$ — параметр) и пусть $M\eta = M(x)$, причем для любого действительного α уравнение $M(x) = \alpha$ имеет единственный корень ϑ. Для отыскания ϑ, соответствующего заданному α, можно в качестве первого приближения x_1 выбрать любое действительное число и построить следующий итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n + c_n(\alpha - \eta_n) \quad (n \geqslant 1),$$

где η_n — независимые случайные величины с функциями распределения $F(y, x_n)$, а $\{c_n\}$ — числовая последовательность, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{n} c_n^2 < +\infty$$

При некоторых достаточно общих предположениях относительно $M(x)$ можно показать (см. Robbins H., Munro S., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 400—407), что $x_n \to \vartheta$ $(n \to \infty)$ по вероятности. Автор дает оценку сверху для $b_n = M(x_n - \vartheta)^2$ и находит условия, достаточные, чтобы $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$

Л. Н. Большев

3407. Об асимптотической нормальности некоторых упорядоченных статистик. Дуасс (On the asymptotic normality of certain rank order statistics. Dwass Meyer), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 2, 303—306 (англ.)

Пусть $(R_1, \ldots, R_N)$ — случайный вектор, совпадающий с каждой из $N!$ перестановок чисел $1, 2, \ldots, N$ с одинаковой вероятностью $1/N!$, и пусть $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_{Ni} b_{NR_i}$, где $(a_{N1}, \ldots, a_{NN})$, $(b_{N1}, \ldots, b_{NN})$ — две заданные для каждого N последовательности чисел, причем

$$\sum_{i=1}^{N} a_{Ni} = \sum_{i=1}^{N} b_{Ni} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} a_{Ni}^2 = 1.$$

Пусть X — случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$, $Z_{N1} \leqslant Z_{N2} \leqslant \ldots \leqslant Z_{NN}$ — расположенные в порядке возрастания результаты $X_1, \ldots, X_N$ N независимых наблюдений величины X и

$$b_{Ni} = MZ_{Ni}^k - N^{-1} \sum_{j=1}^{N} MZ_{Nj}^k.$$

Если

а) $M|X|^{3k} < +\infty$ и

б) каждая из величин X_i^k нормальна или

в) $\max_{1 \leqslant i \leqslant N} |a_{Ni}| \to 0$ при $N \to \infty$,

то S_N асимптотически нормальна.

Приводятся примеры применения этой теоремы и показывается, что она обобщает ряд результатов, ранее полученных другими авторами. *И. И. Гихман*

3408. Совместная обработка разнородных групп данных по методу наименьших квадратов и значимость используемых ортогональных многочленов. Кимбалл (A multiple group least squares' problem and the significance of the associated orthogonal polynomials. Kimball Bradford F.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 262, 320—335 (англ.)

Пусть, например, изучается регрессия z_0 на величины z_1, z_2, z_3 и имеется S групп данных $z_{0j}^{(s)}, z_{1j}^{(s)}, z_{2j}^{(s)}, z_{3j}^{(s)}$; $j = \overline{1, N^{(s)}}$; $s = \overline{1, S}$. Допустим, что уравнение регрессии для s-й группы имеет вид:

$$z_0 = \alpha^{(s)} z_1 + \beta^{(s)} z_2 + \gamma z_3,$$

т. е. что коэффициенты регрессии α, β различны для разных групп, а коэффициент γ является общим для всех групп. Показывается, что формулы для вычисления коэффициентов регрессии имеют вид:

$$\gamma = \Big[\sum_s (a_{30}^{(s)} - B_1^{(s)} a_{31}^{(s)} - B_2^{(s)} a_{32}^{(s)})\Big] \Big/ \Big[\sum_s (a_{33}^{(s)} - A_1^{(s)} a_{31}^{(s)} - A_2^{(s)} a_{32}^{(s)})\Big];$$

$$\alpha^{(s)} = B_1^{(s)} - \gamma A_1^{(s)};\ \beta^{(s)} = B_2^{(s)} - \gamma A_2^{(s)},$$

где $a_{ik}^{(s)}$ — моменты величин $(z_i \cdot z_k)$, вычисленные по данным s-й группы; $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$ и $B_1^{(s)}$, $B_2^{(s)}$ — решения уравнений

$$A_1^{(s)} a_{i1}^{(s)} + A_2^{(s)} a_{i2}^{(s)} = a_{i3}^{(s)};\ B_1^{(s)} a_{i1}^{(s)} + B_2^{(s)} a_{i2}^{(s)} = a_{i0}^{(s)};$$
$$i = 1, 2.$$

Методом, изложенным в другой статье автора (Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 299 — 303), вместо величин z_1, z_2, z_3 можно ввести для каждой группы данных ортогональные многочлены $\varphi_1^{(s)} = z_1$; $\varphi_2^{(s)} = z_2 - (a_{12}^{(s)} / a_{11}^{(s)}) z_1$; $\varphi_3^{(s)} = z_3 - A_1^{(s)} z_1 - A_2^{(s)} z_2$. Тогда

$$\gamma = \frac{1}{Q} \sum_s \sum_{j=1}^{N^{(s)}} z_{0j}^{(s)} \varphi_3^{(s)} (z_{1j}^{(s)}, z_{2j}^{(s)}, z_{3j}^{(s)});$$

$$Q = \sum_s \sum_{j=1}^{N^{(s)}} [\varphi_3^{(s)} (z_{1j}^{(s)}, z_{2j}^{(s)}, z_{3j}^{(s)})]^2.$$

Это выражение удобно для подсчета выборочной дисперсии величины γ, которая оказывается равной V/Q, где V — сумма квадратов остатков уравнений регрессии, деленная на число степеней свободы $\sum_s N^{(s)} - (2s+1)$.

Аналогично могут быть подсчитаны дисперсии других коэффициентов регрессии.

Изложенный метод пригоден и при наличии у результатов измерений различных весов. Он приложим ко всем задачам с разнородными группами данных, когда некоторые из коэффициентов регрессии предполагаются одинаковыми для всех групп.

А. С. Монин

3409. Характеристические свойства линии органической корреляции. Краскал (On the uniqueness of the line of organic correlation. Kruskal William H.), Biometrics, 1953, **9**, № 1, 47—58 (англ.)

Пусть $X = \{X_1, \ldots, X_p\}$ — p-мерный случайный вектор, имеющий математическое ожидание $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ и невырожденную матрицу центральных вторых моментов $\Sigma = \|\sigma_{ij}\|$ такую, что надлежащим выбором знаков у величин X_i можно сделать все коэффициенты корреляции положительными (для этого необходимо и достаточно, чтобы при любых i, j, k было $\sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{jk} > 0$). Линией органической корреляции называется прямая (μ, λ), проходящая через точку μ и имеющая своим направляющим вектором $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, где $\lambda_i = \operatorname{sgn} \sigma_{i1} \sqrt{\sigma_{ii}}$.

Доказывается, что если каждому целому p и невырожденному p-мерному случайному вектору X соответствуют векторы $\alpha = \alpha(p, \mu, \Sigma)$ и $l = l(p, \mu, \Sigma)$, причем выполняются некоторые естественные условия, то прямая (α, l) является линией органической корреляции. В том случае, когда X имеет нормальное распределение, линия органической корреляции совпадает с прямой (α, l), для которой сумма

$$\sum_{i \neq j} P\{|(X_j - \alpha_j) - (l/l_i)(X_i - \alpha_i)| \leqslant \beta_{ij} \sqrt{\sigma_{ij}}\}$$

будет максимальной (здесь все $\beta_{ij} = \beta_{ji} > 0$).

Л. Н. Большев

3410. Оценка и способ сравнения силы связи признаков по таблицам сопряженности признаков. Стюарт (The estimation and comparison of strengths of association in contingency tables. Stuart A.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 105—110 (англ.)

Автор предлагает новый показатель силы связи двух признаков, оцениваемый по таблице сопряженности признаков. Предполагается, что строки и столбцы в таблице расположены в некотором естественном порядке (например, согласно возрастанию или убыванию признаков классификации). Для каждой пары объектов i-го и j-го наблюдений $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ отмечаются их ранги r_i и r_j при упорядочивании по каждому из признаков; после этого вычисляются «отметки соответствия» рангов по первому (a_{ij}) и по второму (b_{ij}) признаку: a_{ij}, $b_{ij} = +1$, если $r_i < r_j$; a_{ij}, $b_{ij} = -1$, если $r_i > r_j$; a_{ij}, $b_{ij} = 0$, если $r_i = r_j$.

Показатель автора t_c так же как и показатель Кендалла (Kendall M. G., The advanced theory of statistics, 1, 4-th ed., London, 1948) основан на подсчете суммы $\Sigma a_{ij} b_{ij} = 2S$ и использует лишь более правильную нормировку, учитывающую максимальное возможное значение этой суммы:

$$t_c = 2S / n^2 \frac{(m-1)}{m},$$

где m — минимум чисел, выражающих число строк и столбцов.

Систематическая погрешность при таком определении показателя связи несущественна. Указывается верхняя граница для $D(t_c)$, примененная для построения доверительных интервалов.

Н. В. Смирнов

3411. Статистическое изучение временных рядов. Кивелёвич, Вьялар (Etude statistique des séries chronologiques. Kiveliovitch M., Vialar J.), J. scient. météorol., 1953, **5**, № 17, 21—46 (франц.)

Исследуются некоторые непараметрические критерии проверки гипотезы «случайности» последовательности наблюдений, т. е. подчиненности их одному и тому же закону распределения и взаимной независимости.

Закон распределения предполагается абсолютно непрерывным. Член x_i $(i = 2, 3, \ldots)$ называется максимумом (минимумом), если он больше (меньше), чем соседние с ним члены x_{i-1} и x_{i+1} последовательности. Если между минимумом (максимумом) и следующим максимумом (минимумом) находится $(i-1)$ возрастающих (убывающих) членов последовательности, то говорят, что имеется фаза подъема (убывания) порядка i случайной кривой. Вероят-

ность того, что средний член из трех следующих друг за другом членов последовательности даст максимум (минимум), равна 1/3.

В статье подробно изучаются распределения фаз; вероятность фазы порядка i (того или иного вида) равна

$$\pi_i = \frac{2(i^2+3i+1)}{(i+3)!}$$

Вероятность получения фазы какого-либо типа порядка i с последующей за ней фазой противоположного типа порядка j равна

$$\theta_{ij} = \frac{2}{(i+1)!\,(j+1)!}\left(\frac{ij}{i+j+1} + \frac{1}{i+j+3}\right).$$

Вероятность, что два экстремума одинакового типа будут разделены n членами, равна

$$\mu_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(n-1)}{(n+3)}.$$

Все эти результаты не зависят от вида плотности распределения. В качестве критериев «случайности» рекомендуется использовать сравнение эмпирически наблюденных чисел n_1, n_2, $n_{\geqslant 3}$ фаз порядков соответственно первого, второго, трех и больше с общим числом P подсчитанных фаз.

При выполнении гипотезы случайности для больших P должны иметь место приближенные равенства

$$n_1 = \frac{5}{8}P; \quad n_2 = \frac{11}{40}P; \quad n_{\geqslant 3} = \frac{1}{10}P.$$

Для оценки уклонений указываются доверительные интервалы. Другой критерий, не получивший строгого обоснования в работе, заключается в оценке частоты экстремумов; для этой частоты указывается область допустимых значений без указания вероятностной оценки. *Н. В. Смирнов*

3412. **Продолжительность до появления и продолжительность отсутствия наибольшего значения. Леве** (La durée de retour et la durée d'absence de la plus grande valeur. Levert Christoffel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 5, 374—376 (франц.)

Делается несколько почти очевидных замечаний о распределении числа испытаний до первого положительного исхода в серии независимых испытаний Бернулли при малой вероятности положительного исхода (требование независимости не оговаривается явно). Изложение ведется на языке статистики. Выводы основаны на приблизительных соображениях. *Р. Л. Добрушин*

3413. **Применение отрицательно-биномиального распределения в биологии. Блисс** (Fitting the negative binomial distribution to biological data. Bliss C. I.), Biometrics, 1953, **9**, № 2, 176—196 (англ.)

Работа носит обзорный характер. Рассматриваются свойства отрицательно-биномиального распределения, оценки его параметров, вопрос о точности этих оценок и т. п. Указываются некоторые применения этих результатов к биологии. Библиография 33 названия. *Р. Х. Дивеев*

3414. **Замечание об эффективных оценках параметров отрицательно-биномиального распределения. Фишер** (Note on the efficient fitting of the negative binomial. Fisher R. A.), Biometrics, 1953, **9**, № 2, 197—200 (англ.)

Реферируемая работа является дополнением к работе Блисса (см. реф. 3413). Дается оценка одного из параметров отрицательно-биномиального распределения методом максимума правдоподобия. *Р. Х. Дивеев*

3415. **Номограмма для проверки значимости отличия средних в двух выборках. Варнум** (Nomogram for evaluating test data. Varnum Edward C.), Prod. Engng, 1953, **24**, № 2, 215 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и $y_1, y_2, \ldots, y_N$ — две группы независимых наблюдений нормальной случайной величины ξ. На основе хорошо известного отношения Стьюдента построена номограмма из выравненных точек, позволяющая находить пятипроцентные доверительные интервалы D для абсолютной величины разности $\bar{x} - \bar{y}$ в зависимости от N и $s_x^2 + s_y^2 = N^{-1}\Sigma[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2]$. Шкалы N и $s_x^2 + s_y^2$ лежат на окружности, шкала D — диаметр этой окружности. *Л. Н. Большев*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3416. **О статистической теории обнаружения случайно модулированной несущей. Стоун** (On the statistical theory of detection of a randomly modulated carrier. Stone W. M.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 7, 935—939 (англ.)

Рассматривается электрическое напряжение $V(t)$, состоящее из гауссовского случайного шума $V_N(t)$ (спектральная плотность которого считается постоянной в заданном интервале) и, может быть, сигнала $V_s(t) = A\cos wt$; требуется по наблюденному значению (или нескольким независимым значениям) огибающей R процесса $V(t)$ (о понятии огибающей случайного процесса см. Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд-во «Советское радио», М., 1951, или Райс С., статья в сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953) выяснить, присутствует ли сигнал в составе $V(t)$ или нет. В работе Каплана и Мак-Фолла (Kaplan S. M., McFall R. W., Proc. Instn Radio Engrs, 1951, **39**, № 1, 56—60) предлагается при решении вопроса исходить из того, превзошло ли наблюденное значение R (или хоть одно из наблюденных значений, если их несколько) выбранный заранее «уровень смещения» x_0 (определяемый в зависимости от допустимой частоты ложных обнаружений сигнала) или нет; после этого нетрудно подсчитать вероятность обнаружения сигнала для различных значений отношения интенсивностей $V_N(t)$ и $V_s(t)$ и определить амплитуду минимального обнаруживаемого сигнала, т. е. такого сигнала, для которого вероятность обнаружения впервые превосходит заданную величину (например, 0,9 или 0,5). В реферируемой работе теория Каплана и Мак-Фолла обобщается на случай, когда роль синусоидального сигнала играет случайно модулированная несущая, т. е. когда амплитуда A функ-

ции $V_s(t)$ является случайной величиной, подчиненной распределению вероятностей с известной плотностью $p(A)$. Воспользовавшись разложением распределения вероятностей для огибающей R в ряд Эджворта, вероятность того, что R превзойдет x_0, удается выразить через моменты величины R и некоторые табулированные функции (интеграл вероятностей и его производные); таким образом, основная трудность задачи заключается в определении моментов величины R. Если вместо самой огибающей наблюдается ее квадрат $u = R^2$ (т. е. используется квадратичный детектор), то для искомых моментов величины u получается несложная интегральная формула. Для некоторых частных видов плотности распределения вероятностей $p(A)$ (для усеченного нормального распределения, гамма-распределения и распределения, совпадающего с распределением корня квадратного из суммы квадратов независимых (0, 1) нормально распределенных слагаемых) эта формула позволяет получить явные формулы для моментов, не содержащие интегралов. В случае, когда наблюдается не u, а само R (что эквивалентно использованию линейного детектора), для моментов R получается сложная интегральная формула, содержащая гипергеометрическую функцию; преобразование этой формулы к виду, не содержащему интегралов, оказывается возможным лишь для последней из трех рассматриваемых в статье форм плотности $p(A)$.

Более полное обсуждение рассматриваемого в настоящей статье вопроса с привлечением методов современной математической статистики см. в работах Мидлтона (Middleton D., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 4, 371—378, 379—391).

А. М. Яглом

3417. Статистическая теория прогноза Норберта Винера (теория информации. VI). Земанек (Die statistische Vorhersagetheorie von Norbert Wiener (Informationstheorie. VI Teil). Zemanek Heinz), Radio-Technik, 1953, **29**, № 2, 57—60 (нем.)

Для читателя-радиоинженера разъясняется содержание теории Колмогорова — Винера статистического экстраполирования стационарных случайных процессов. Вкратце намечаются основные положения принадлежащего Боде и Шеннону истолкования этой теории в привычных для указанного читателя терминах (Bode H. W., Shannon C. E., Proc. Inst. Radio Engnrs, 1950, **38**, 417—425).

А. М. Яглом

3418. Приложения теории информации. Фромажо (Applications de la théorie de l'information. Fromageot A.), Onde électr., 1953, **33**, № 316, 473—478 (франц.)

Сжатый отчет о докладах Лондонского конгресса по приложениям теории информации (сентябрь 1952 г.). Из 33 сообщений конгресса кратко реферируются 8, посвященных отдельным приложениям теории информации к задачам телефонной и телеграфной связи.

А. Я. Хинчин

3419. Теория информации. Андрю (Information theory. Andrew A. M.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 309, 471—475 (англ.)

Краткий очерк основных понятий, результатов и применений теории информации.

А. Я. Хинчин

3420. Ошибки, обусловленные совпадением и наложением частиц при автоматическом подсчете и определении их размеров. Ходкинсон (Coincidence and overlap errors in the automatic counting and sizing of particles. Hodkinson J. R.), Nature, 1953, **171**, № 4347, 351—352 (англ.)

При автоматическом подсчете числа частиц (например, частиц угольной пыли) и при оценке их размеров возникают ошибки, если какие-либо из частиц находятся друг относительно друга на расстояниях меньших, чем разрешающая сила счетного устройства, или если они налагаются друг на друга. Даны формулы, позволяющие учесть указанные ошибки в случае, когда определяются и число частиц и их размеры, и в случае, когда определяется лишь число частиц. Полученные формулы позволяют определить нужную ширину трека, на котором автоматически подсчитывается число частиц и определяются их размеры.

И. Л., А. Д.

3421. Теоремы двойственности для гипергеометрического распределения. Романовский В. И., Тр. Ин-та мат. и механики Узб. ССР, 1953, № 11, 22—28

По известному априорному распределению величины M вычисляется апостериорная вероятность $P\{M, N | m, n\}$ того, что в партии объема N заключается M дефектных изделий, когда известно, что выборка объема n из той же партии обнаружила m дефектных. Делаются два предположения относительно априорного распределения M: а) M распределено равномерно, б) M имеет биномиальное распределение.

Доказанные теоремы применяются к задаче простой приемочной инспекции. Способ решения этой задачи иллюстрируется на численном примере.

Н. Н. Ченцов

3422. Приемочный контроль. Кавé (Contrôle de réception. Cavé M.), Docum. métallurgique, 1953, № 15, 108—113 (франц.)

Реферируемая статья относится к серии статей автора, посвященных различным аспектам производственных применений статистических методов.

Содержится популярное, в минимальной степени использующее математический аппарат, описание построения основных характеристик (оперативная характеристика, кривая средней доли брака в большом числе принятых партий, в зависимости от доли брака в партиях, предъявляемых для контроля) приемочного контроля, осуществляемого в зависимости от числа бракованных изделий в однократной выборке фиксированного объема. Без вывода приводятся формулы для приближенного определения параметров прямых, ограничивающих контрольные зоны при приемочном контроле методом последовательного анализа. Упоминается о модификации этого метода для случая последовательных выборок одинакового объема, большего единицы, и о приемочном контроле при помощи двух выборок (Додж и Ромиг). Приводимые соображения, которыми следует руководствоваться при выборе той или иной схемы контроля, явно недостаточны.

Г. И. Егудин

3423. Определение, выбор и контроль качества материалов. Про (Définition, choix et contrôle de la qualité des matériaux. Prot Mar-

c e l), Rev. matér. constr. et trav. publics, 1953, № 449, 33—44 (франц.)

Излагаются статистические методы определения качества материалов. Прилагаются таблицы и номограммы с указанием конкретных приемов их использования во многих практических задачах. Библиография 15 названий. *С. Х. Сираждинов*

3424. Статистический контроль качества. Краткое руководство по выборочному контролю. Гриффитс (Statistical quality control. The introduction of a form of sampling inspection. G r i f f i t h s L.), Automob. Engr, 1953, **43**, № 572, 453—458 (англ.)

Рецептурное изложение методики текущего статистического профилактического контроля производственного процесса при помощи контрольных диаграмм по средним размахам и стандартам периодически осуществляемых малых выборок. Полностью отсутствуют теоретические обоснования излагаемых методов; в частности, ничего не сказано о нормальном законе распределения, применительно к которому только излагаемые методы и могут претендовать на справедливость. Не указано, что рекомендуемые критерии носят вероятностный характер и что приводимые значения различных величин, необходимых при построении контрольных пределов, соответствуют определенному значению вероятности напрасного вмешательства. Неудовлетворительна указываемая рецептура образования базовых выборок, служащих для оценки параметров генерального распределения и необходимых при определении правильных значений контрольных пределов.

Анализ контролируемых процессов, который должен предшествовать введению статистического контроля, сводится к определению «индекса относительной точности» $I = \delta/\bar{R}$, где δ — допуск и $\bar{R}$ — среднее значение размаха в серии малых выборок объема n. В зависимости от значения I, процессы классифицируются как процессы низкой, средней и высокой точности. Если перейти к более обычной оценке точности процесса отношением δ/σ, где σ — стандарт генерального распределения, то процессами низкой точности будут те, для которых $\delta/\sigma < 6{,}5$, а высокой — те, для которых $\delta/\sigma > 7{,}5$. Для процессов высокой точности рекомендуется совершенно произвольная методика построения контрольных пределов на диаграмме средних откладыванием внутрь от пределов допуска расстояний, равных $0{,}75\,\bar{R}$, при любом n от 3 до 6.

При отсутствии предварительных данных, характеризующих состояние производственного процесса, рекомендуется построение «пробных» контрольных пределов, откладываемых на диаграмме средних, от середины поля допуска симметрично вверх и вниз на расстоянии $\delta/2\sqrt{n}$. Контрольный «пробный» предел на диаграмме откладывается от нуля на расстоянии $e = [\delta - \delta(n)^{-1/2}]/2M$, где приводимые в статье значения M для различных объемов выборки n показывают, что они рассчитаны в предположении $\delta = 6\sigma$. *Г. И. Егудин*

3425. Статистические методы в технических опытах. II. Эйзенклам (Statistical methods in engineering experimentation. II. E i s e n k l a m P.), Research, 1953, **6**, № 6, 231—237 (англ.)

Часть I этой работы см. РЖМат, 1953, 1316. Подробно рассматриваются постановка и анализ результатов одного технического опыта и так называемый частично (дробно) повторный план факторного анализа. Опыт состоял из 36 испытаний, разбитых на три последовательности по 12 испытаний в каждой и имеющих целью исследовать результаты высушивания шести типов угля при трех различных температурах и двух высушивающих скоростях. План опыта, при однократном испытании каждой комбинации, был типа $3 \times 3 \times 2 \times 2$ смешанного факторного анализа.

Кратко излагается частично повторный факторный план анализа по Финни (Finney D. J., Ann. Eugenics, London, 1945, 12, 291). Этот план, особенно пригодный для анализа действия большого числа факторов и их комбинаций, автор рекомендует для применения в технических опытах, где он может быть использован в виде последовательного анализа частей опыта, следующих одна за другой.

В. И. Романовский

3426. Контроль качества с использованием статистических методов. Измерение изменчивости и ее применение. Энрик (Quality control through statistical methods. Measurement of variability and its uses. E n r i c k N o r b e r t L l o y d), Mod. Text. Mag., 1953, **34**, № 11, 43—46 (англ.)

См. также: 3182, 3469

ГЕОМЕТРИЯ

3427. Об одном обобщении прямой и отрезка Эйлера. Ралевич (Sur une généralisation de la droite et du segment d'Euler. R a l j e v i ć Š e f k i j a), Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Glasnik mat.-fiz. et astron., Ser. II, 1953, **8**, 47—48 (сербо-хорват.; резюме франц.)

Из Math. Rev., 1953, 14, № 10, 1007.

3428. Заметки о четырехугольниках. Рингенберг (Comments on quadrilaterals. R i n g e n b e r g L. A.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 478 (англ.)

Приводятся доказательства известных теорем.

3429. Многоугольники. Лангман (Polygons. L a n g m a n H a r r y), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 79—80 (англ.)

Приводится фигура, состоящая из 8 вершин и 15 отрезков. Подсчитывается число многоугольников, которое при определенных условиях может быть составлено из отрезков данной фигуры.

С. И. Зетель

3430. Символика в геометрии треугольника. Кобб (A symbolism for the geometry of the triangle. C o b b R. H.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 174—187 (англ.)

Приводится система обозначений, при помощи которой выражаются различные свойства треугольника. Эти обозначения упрощают вывод некоторых его свойств. *С. И. Зетель*

3431. Гнезда пифагоровых треугольников. Уитлок (Nests of Pythagorean triangles. Whitlock W. P., Jr), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 66—68 (англ.)

Рассматриваются пифагоровы треугольники (прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются целыми числами), у которых перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит треугольник на два пифагоровых. Если $r^2 = a^2 + b^2$ и числа r, a и b взаимно простые, то из треугольника со сторонами r^n, ar^{n-1}, br^{n-1} получается серия («гнезда») пифагоровых треугольников. *С. И. Зетель*

3432. Эллипс и овал. Равиньо (Ellipse et ovale. Ravigneaux Pol), Vie automob., 1953, **48**, № 1468, 296—300 (франц.)

Эллипс приближенно заменяется овалом, состоящим из дуг окружностей. Поводом для этой задачи в данной статье является архитектура кузова автомобиля. Полученный овал используется, между прочим, для приближенного спрямления эллипса. Оценка ошибки дается только на одном числовом примере. *Н. М. Бескин*

3433. Метод резекции (обратной засечки). Эванс (A resection method. Evans S. E.), Empire Survey Rev., 1953, **12**, № 89, 126—130 (англ.)

Дается видоизменение метода последовательных приближений, который был впервые использован для определения места взрыва при одной геофизической съемке. На трех подробно разобранных примерах показано приложение метода к решению задач на местности. *С. И. Зетель*

3434. Высечение пирамидой из сферы. Пирс (Pyramidal indentation of a sphere. Peres N. J. C.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 212—214 (англ.)

Определяется площадь, вырезаемая из сферы данного радиуса четырехугольной пирамидой с данным углом между нормалями к двум противоположным граням пирамиды и с данной диагональю основания. Приводится приближенное выражение площади, удобное для практических приложений. *С. И. Зетель*

3435. Приложение физики и математики средней школы к авиационному моторостроению. Гаррисон (High school physics and mathematics as applied to aircraft engine mechanics. Harrison Alvin), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 4, 297—305 (англ.)

Формулы для площади круга и длины окружности применяются для вычисления индикаторной мощности и тяги авиационного мотора. *В. И. Левин*

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3436. Приложения конического сечения одиннадцати точек. Сингх (Applications of the eleven point conic. Singh Kuldip), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 468—474 (англ.)

Если S и S' — два конических сечения, то каждой точке P соответствует точка P', полярно сопряженная P одновременно относительно S и S'. Если P описывает прямую, то P' описывает коническое сечение, называемое «коническим сечением одиннадцати точек». Название объясняется тем, что это коническое сечение проходит через одиннадцать точек, простым образом связанных с фигурой, образованной четырехугольником, вершинами которого служат точки пересечения S и S', и прямой, которую описывает P.

При изучении центральных поверхностей второго порядка полезно рассматривать два конических сечения: q — сечение данной поверхности несобственной плоскостью и Ω — абсолютный мнимый круг. При помощи конического сечения одиннадцати точек, соответствующего q, Ω и несобственной прямой некоторой секущей плоскости, автор весьма просто получает некоторые метрические свойства центральных поверхностей второго порядка. Например, если поверхность $f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$ пересечена плоскостью $lx + my + nz = 0$, то главными осями сечения являются прямые, по которым данная плоскость сечет конус

$$(mz - ny)\frac{\partial f}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial f}{\partial y} + (ly - mx)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Н. М. Бескин

3437. Геометрическое построение гомографического преобразования. Мурман (Construction géométrique de la transformation homographique. Mourmant P.), Onde électr., 1953, **33**, № 317—318, 540—542 (франц.)

Дробно-линейное преобразование комплексного переменного, которое автор для экономии параметров записывает в виде $Z = \alpha\frac{\beta + z}{\gamma + z}$, разлагается на поступательные переносы, инверсию и симметрию. Рассматривается преобразование координатной сетки $\arg z = \text{const}$, $|z| = \text{const}$. Для различных линий этой сетки указываются четыре точки в плоскости Z, через которые проходит соответствующая окружность, и центр этой окружности. *Н. М. Бескин*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3438. Современные тенденции алгебраической геометрии. Самюэль (Quelques tendances récentes de la géométrie algébrique. Samuel Pierre), Enseign. math., 1942—1950, **39**, 180—191 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 900.

3439. Об аксиоматике геометрии. Михэйляну (Despre axiomatica geometriei. Mihăileanu N.), Rev. mat. şi fiz., 1953, **4**, № 10, 247—249 (рум.)

Популярное изложение аксиоматики Гильберта евклидова пространства и вопросов, связанных с этой аксиоматикой, по «Высшей геометрии» Н. В. Ефимова (2-е изд., Гостехиздат, М.—Л., 1949); цитируются также «Геометрия» С. А. Богомолова (Учпедгиз, М.—Л., 1949) и «Курс элементарной геометрии» Д. И. Перепелкина, Т. 1 (Гостехиздат, М.—Л., 1948). *Б. А. Розенфельд*

3440 К. **Бирациональные преобразования на плоскости.** Годо (Les transformations birationnelles du plan. Godeaux Lucien), 2-nd ed., 70 pp., Mémor. Sci. Math., № 122, Gauthier-Villars, Paris, 1953, 900 francs (франц).

Монография, повидимому, имеет своей целью дать возможно более простое и элементарное введение в классическую теорию кремоновых преобразований на плоскости.

Небольшая первая глава содержит изложение по Энриквесу теории сверхлинейных ветвей плоских кривых, по их разложениям Пюизо (Puiseux); вторая глава дает такую же краткую сводку общих свойств линейных систем плоских кривых, ведущую к характерам гомолоидальных сетей.

Третья глава содержит простое изложение теории общих кремоновых преобразований на плоскости; числовые соотношения между характерами гомолоидальной сети и ее особыми фундаментальными кривыми получаются довольно прозрачно путем рассмотрения проективной модели суммы гомолоидальной сети преобразований вместе с такой же сетью прямых, в виде поверхности, которая имеет то преимущество, что она симметрично связана с заданным преобразованием и ему обратным и, кроме того, явно содержит все фундаментальные кривые обоих преобразований как кривые. Затрагивается вопрос о возможности расположения некоторых базисных точек преобразования в окрестности других фундаментальных точек, а также распадения некоторых фундаментальных кривых.

Четвертая глава содержит тщательное и весьма ясное изложение теоремы Нётера — Кизини (Noether — Chisini).

Последние две главы книги посвящены элементарным свойствам ковариантности относительно кремоновых преобразований якобиевых и присоединенных систем для данной кривой, разыскиванию модели минимального порядка систем данного рода и т. д., а также конечным непрерывным группам кремоновых преобразований.

В связи с этим классические результаты формулируются без больших доказательств, но с указанием соответствующей литературы.

Книга заканчивается весьма обширной, на наш взгляд, библиографией. *Дю Валь* (*P. Du Val*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 898.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3441. **О кривых, имеющих заданную кривую в качестве геометрического места центров кривизны соприкасающихся сфер.** Джха (On curves having a given curve for the locus of the centre of spherical curvature. Jha P.), Math. Student, 1952, **20**, 115—118 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1013.

3442. **К представлению кривизн линии на поверхности при помощи пфаффовых форм.** Шарф (Zur Darstellung der Krümmungen einer Flächenkurve mit Pfaffschen Formen. Scharff Heinrich), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 71—74 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Используя обозначения Э. Картана, автор получает выражения для геодезического кручения, нормальной и геодезической кривизны линии на поверхности. *Аллендорфер* (*C. B. Allendoerfer*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 901.

3443. **Расслояемые пары, присоединенные к параболической конгруенции общих перпендикуляров.** Фиников С. П., Мат. сб., 1953, 33(75), № 1, 3—12

Рассматриваются пары расслояемых конгруенций, соответствующие лучи которых ортогональны лучу параболической конгруенции. В общем случае параболическая конгруенция вместе с присоединенной расслояемой парой определяется с произволом шести функций одного аргумента. Из двух специальных случаев, рассмотренных в работе, наиболее интересным является первый.

Предполагая, что пара симметричная, автор показывает, что гауссова кривизна фокальной поверхности вдоль каждой асимптотической линии одного семейства постоянна. Поверхность в этом случае является специальным случаем поверхности Бианки; соответствующие лучи расслояемой пары пересекают касательную к асимптотической в точках, симметричных относительно точки касания, и образуют с касательной плоскостью поверхности углы, равные по абсолютному значению и противоположные по знаку. *С. В. Бахвалов*

3444. **Триортогональная система линий комплекса прямых.** Кованцов Н. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, 125—128

Рассматривается комплекс прямых в евклидовом пространстве. С каждым лучом комплекса связывается инвариантным образом следующий трехгранник: вершина A — центр луча комплекса, $\mathbf{I}_1$ — единичный вектор главной нормали, $\mathbf{I}_2$ — единичный вектор бинормали комплекса, $\mathbf{I}_3$ — единичный вектор луча комплекса (Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, 1948, М.—Л.). Комплексы, описываемые лучами $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, обозначены через B_1, B_2, B_3.

Произвольный комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторому двухпараметрическому семейству кривых. Выведено необходимое и достаточное условие того, чтобы данное двухпараметрическое семейство кривых было семейством центральных кривых некоторого комплекса, т. е. кривых, огибаемых лучом комплекса и имеющих точку касания с лучом в его центре. Произвол существования такого семейства равен произволу общего комплекса.

Произвольный комплекс определяет в пространстве некоторую триортогональную систему линий с касательными $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$. Кривые, огибаемые лучом комплекса $\mathbf{I}_3$ и описываемые его центром A, являются центральными для комплекса B_3. Центральные кривые комплекса B_1 также описываются точкой A. Луч $\mathbf{I}_2$ огибает нецентральные кривые («бинормальные»). Рассмотрены комплексы B_3: а) для которых центральные кривые комплекса B_3 плоские; б) для которых центральные кривые комплекса B_1 плоские.

Рассмотрены частные виды комплексов B_3: а) комплексы, у которых каждая из кривых рассматриваемого триортогонального семейства вырождается в точку; б) комплексы, у которых центральные кривые комплексов B_3 и B_1 расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей;

в) комплексы, у которых центральные кривые комплекса B_3 и бинормальные кривые расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей; г) комплексы, у которых центральные кривые комплекса B_1 и бинормальные кривые расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей. Доказано, что триортогональная система линий не может расслаиваться в триортогональную систему поверхностей. *Т. А. Шульман*

3445. Топологический инвариант шести линейных элементов второго порядка, принадлежащих точке плоскости. Б у к о в и ч (Eine topologische Invariante von sechs Linienelementen zweiter Ordnung eines Punktes der Ebene. B u k o v i c s E.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 2, 117—128 (нем.)

Линейным элементом n-го порядка называется элемент кривой, определенный с точностью до n-й окрестности этой кривой. Разыскивается минимальное число линейных элементов 2-го порядка, имеющих инвариант 2-го порядка относительно преобразования T

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{1}$$

где x, y — дважды непрерывно дифференцируемые функции с отличным от нуля функциональным определителем. Полагая

$$du = \sigma = \cos\alpha\, ds, \quad dv = \tau = \sin\alpha ds,$$
$$d^2v\, du - d^2u\, dv = \eta = \varkappa\cdot(\sigma^2+\tau^2)^{3/2},$$

где α, ds, $\varkappa$ — соответственно угол наклона касательной, дифференциал длины дуги и кривизна линейного элемента, замечаем, что числа $\rho\sigma$, $\rho\tau$, $\rho^3\eta$ можно рассматривать как псевдооднородные координаты линейного элемента.

Обозначая дифференцирование x или y по u и по v индексами 1 и 2, с коренной буквой a или b

$$x_u = a_1, \quad y_{uv} = b_{12},$$

напишем с помощью (1) формулы преобразования однородных координат σ, τ, $\eta \to \sigma'$, τ', η'

$$\rho\sigma' = a_1\sigma + a_2\tau, \quad \rho\tau' = b_1\sigma + b_2\tau,$$
$$\rho^3\eta' = H_3(\sigma, \tau) + (a_1b_2 - a_2b_1)\eta, \tag{2}$$

где $H_3(\sigma, \tau)$ — форма, кубичная относительно σ, τ, билинейная относительно a_i, a_{ik} и b_i, b_{ik}. Первые две формулы (2) дают преобразование (проективное) элементов 1-го порядка; третья показывает, что для $H_3(\sigma, \tau) = 0$ получаются три характеристические согласно Борувка (Borůvka) направления, для которых элементы перегиба $\eta = 0$ (линейные элементы точек перегиба) переходят в элементы перегиба.

Если рассматривать числа

$$X_0 = \eta, \quad X_1 = \sigma^3, \quad X_2 = \sigma^2\tau, \quad X_3 = \sigma\tau^2, \quad X_4 = \tau^3 \tag{3}$$

как однородные координаты точки в проективном пространстве S_4, то система (3) определяет в нем рациональный конус («нормальный») 3-го порядка. Каждая образующая его определяется элементом 1-го порядка $(\sigma : \tau)$, элементы 2-го порядка соответствуют различным точкам образующей.

Преобразования (2) представляют проективные преобразования H пространства S_4, автоморфные относительно конуса (3), следовательно, они определяются заданием трех пар образующих и двух пар точек на соответствующих образующих. Отсюда преобразования (2) определяются заданием трех пар линейных элементов 1-го (или 2-го) порядка (задание проективитета) и двух пар элементов 2-го порядка, касательные которых соответствуют в этом проективитете. Отсюда минимальное число элементов 2-го порядка, обладающих инвариантом 2-го порядка, равно шести; при этом такой инвариант единственный. Действительно, в S_4 минимальным числом точек, обладающих инвариантом, является семь; эти точки имеют 5 относительных инвариантов, следовательно, — четыре абсолютных, образованных их отношениями $D_i = X_i / X_0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; но

$$D_i = D^* r_i, \text{ где } D^* = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2}$$
$$\text{и } r_i = X_i \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{4} X_k^2}.$$

Поскольку r_i — инварианты 1-го порядка, то D^* — единственный инвариант 2-го порядка. В случае конформного преобразования остаются неизменными две точки перегиба $\sigma_3 = i$, $\tau_3 = 1$, $\eta_3 = 0$ и $\sigma_4 = -i$, $\tau_4 = 1$, $\eta_4 = 0$, а потому инварианты 2-го порядка имеют уже 4 элемента 2-го порядка. В случае проективных преобразований

$$\rho\sigma' = a_1\sigma + a_2\tau, \quad \rho\tau' = b_1\sigma + b_2\tau,$$
$$\rho^3\eta' = (a_1b_2 - a_2b_1)\eta$$

все элементы перегиба переходят в элементы перегиба и для $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$ получается инвариант Бомпиани (Bompiani) и Смита—Мемке (Smith—Mehmke) для двух касающихся кривых. Дано геометрическое истолкование некоторых проективных инвариантов в терминах нормального конуса. *Н. И. Кованцов*

3446. Условия интегрируемости тензора полной деформации в связи с преобразованиями сплошной среды в трехмерном пространстве. П л а т р и й е (Conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation totale dans une transformation finie d'un milieu à trois dimensions. P l a t r i e r C h a r l e s), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, сер. 5, **39**, № 5, 490—494 (франц.)

Рассматривается сплошная среда, каждая точка которой до деформации имела координаты a, b, c, а после деформации x, y, z. Тогда, как известно, условия совместности Сен-Венана выражают тот факт, что в деформированном пространстве $(ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2)$ имеет место геометрия Евклида. Автор рассматривает конечные деформации и вводит тензор

$$\overline{\overline{\Delta}} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix}$$

при помощи соотношений

$$\sum_{(x,\,y,\,z)} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon_1, \qquad \sum_{(x,\,y,\,z)} \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right) = 2\gamma_1, \ldots,$$

так что величины $1 + 2\varepsilon_k$, $4\gamma_k$ являются коэффициентами преобразованной квадратичной формы

$dx^2 + dy^2 + dz^2$. Затем вычисляется квадрат якобиана преобразования

$$I^2 = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}\right]^2 = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & 1+2\varepsilon_2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & 1+2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

и устанавливаются тождества типа

$$I^2\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{2\partial\gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial x} + \left(\frac{2\partial\gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial c}\right)\frac{\partial c}{\partial x},$$

$$I^2\frac{\partial^2 x}{\partial b\partial c} = \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial\gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial c}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial b}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Следует заметить, что условия Сен-Венана для конечных деформаций хорошо известны (Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, ОГИЗ, М., 1948). *И. С. Аржаных*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3447. Метод общих линейных реперов в римановой геометрии. I. Фландерс (A method of general linear frames in Riemanian geometry, I. Flanders Harley), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 551—565 (англ.)

При помощи метода внешних форм Картана выводятся основные формулы римановой геометрии (параллельное перенесение, кривизна, тождества Бианки) для произвольной неголономной системы отнесения.

В частности, гауссова кривизна пространства введена в следующей форме. Известно, что определитель кососимметрической матрицы четного порядка есть квадрат некоторого многочлена P от коэффициентов матрицы. Берется матрица, коэффициенты которой — формы кривизны

$$\theta_{ik} = g_{lk}\theta^l_i, \quad \text{где} \quad \theta^l_i = \frac{1}{2}R^l_{ipr}[\sigma^p\sigma^r] = d\omega^l_i - [\omega^p_i\omega^l_p],$$

а σ^i — базисные формы пространства.

Многочлен P этой матрицы есть форма порядка n и, следовательно, лишь скалярным множителем отличается от элемента объема пространства. Этот множитель есть гауссова кривизна.

А. М. Васильев

3448. Теория сферически симметричного пространства-времени. V. n-Мерное сферически симметричное пространство-время. Такено (Theory of the spherically symmetric space-times. V. n-dimensional spherically symmetric space-times. Takeno Hyôitirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 497—506 (англ.)

Для $n > 4$ дается обобщение результатов, полученных автором при изучении четырехмерного сферически симметричного пространства-времени (S_0) общей теории относительности. Автором было установлено (J. Math. Soc. Japan, 1951, **3**, 317—329), что S_0, т. е. риманово пространство, линейный элемент которого в специальной (сферически симметричной) системе координат получает вид

$$ds^2 = -A(r,t)\,dr^2 - B(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + C(r,t)\,dt^2, \qquad (1)$$

можно охарактеризовать следующими требованиями:

1) сигнатура фундаментальной формы имеет вид $(---+)$;

2) тензор кривизны удовлетворяет уравнению

$$K_{ijlm} = -\overset{1}{\rho}\alpha_{[i}\alpha_{[l}\beta_{j]}\beta_{m]} - \overset{2}{\rho}g_{[i[l}\alpha_{j]}\alpha_{m]} + \overset{3}{\rho}g_{[i[l}\beta_{j]}\beta_{m]} + \overset{4}{\rho}g_{[i[l}g_{j]m]}, \qquad (2)$$

где α_i и β_i соответственно минус и плюс единичные взаимно ортогональные векторы, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla_i\alpha_j = \sigma\alpha_i\beta_j + \varkappa(g_{ij} + \alpha_i\alpha_j - \beta_i\beta_j) + \bar{\sigma}\beta_i\beta_j, \qquad (3)$$

$$\nabla_i\beta_j = \bar{\sigma}\beta_i\alpha_j + \bar{\varkappa}(g_{ij} + \alpha_i\alpha_j - \beta_i\beta_j) + \sigma\alpha_i\alpha_j, \qquad (4)$$

а $\overset{\alpha}{\rho}$ ($\alpha = 1, \ldots, 4$), σ, $\bar{\sigma}$, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$ — скаляры, определяемые из этих уравнений;

3) один из пяти скаляров $\overset{\alpha}{\rho}$ и $K\,(\equiv K_{ij}{}^{ij})$ таков, что его градиент является линейной комбинацией α_i и β_i;

4) $$\overset{4}{\rho} \neq 2(\varkappa^2 - \bar{\varkappa}^2). \qquad (5)$$

Система векторов α_i, β_i и скаляров $\overset{\alpha}{\rho}$, $\bar{\sigma}$, σ, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$ названа характеристической системой, причем векторы α_i и β_i оказываются векторами главных направлений тензора Риччи. Существенно отметить, что, опираясь на свойства характеристической системы, можно для любого V_4 выявить, является ли оно S_0 (Takeno H., Progr. Theoret. Phys., 1952, 8, № 3, 317—326).

Автором также были исследованы этим путем группы движений, класс и конформные преобразования S_0 (J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **A16**, № 1, 67; № 2, 291; № 2, 299).

Для случая $n > 4$ автор для простоты вместо условия 1) полагает, что фундаментальная форма положительно определенная (тогда α_i, β_i — плюс единичные векторы) и определяет S_0 условиями 2), 3), 4) с некоторыми необходимыми изменениями знаков. Доказывается теорема, что существует такая «стандартная сферически симметричная» система координат, в которой фундаментальная форма принимает вид

$$ds^2 = A(r,t)\,dr^2 + B(r,t)\,dl^2 + C(r,t)dt^2 \quad (A,B,C>0), \qquad (6)$$

где

$$dl^2 = (d\theta_2)^2 + \sin^2\theta_2[(d\theta_3)^2 + \ldots + \sin^2\theta_{n-3}\{(d\theta_{n-2})^2 + \sin^2\theta_{n-2}(d\theta_{n-1})^2\}\ldots] \qquad (7)$$

(линейный элемент пространства постоянной кривизны, равной 1), причем

$$K_{1a}{}^{an} = 0 \quad (a = 2, \ldots, n-1; \text{ по } a \text{ не суммируется}). \qquad (8)$$

Автор приводит выражение для характеристической системы в стандартной системе координат и исследует степень произвола в определении харак-

теристической системы для различных типов S_0 (ε-, i-, ω- и m-преобразования). Найдены ортогональный n-эдр, внутренне определенный для S_0, и степень произвола в его определении. Класс пространства S_0 равен или 2, или 1, или 0, причем условия принадлежности S_0 к классу 1 указаны. Классификация пространств S_0 на 11 типов по группам движений проводится, как и в четырехмерном случае. Также сохраняется с небольшими изменениями и большинство результатов, касающихся конформных преобразований. *Б. Л. Лаптев*

3449. Об эквивалентности наблюдателей в частной теории относительности. У э н о (On the equivalency for observers in the special theory of relativity. U e n o Y o s h i o), Progr. Theoret. Phys., 1953, 9, № 1, 74—84 (англ.)

Исследуется связь между частным принципом относительности и группой Лоренца на основе понятия эквивалентности наблюдателей, которое недавно было введено в совместной работе автора и Такено (Takeno H., Progr. Theoret. Phys., 1952 8, № 3, 291—301). Сущность этого понятия, выраженного авторами в субъективистской терминологии, заключается в том, что выделяется некоторый класс систем отсчета (frames) таких, что связи между координатами точки события относительно них образуют группу преобразований. Обратно, задание некоторой группы преобразований выделяет специальный класс систем отсчета — «эквивалентные» системы отсчета (по существу — это предпочитаемые системы координат в геометрии группы преобразований). При этих преобразованиях хотя бы некоторые физические законы должны выражаться инвариантным образом. Особо выделена подгруппа, в которой четвертая координата (время) отделена от первых трех («преобразование системы отсчета одним наблюдателем»).

Автор рассматривает эквивалентные системы отсчета («эквивалентных наблюдателей»), связанные равномерным трансляционным движением. Первый этап исследования — определение группы преобразований, соответствующей этому движению систем отсчета. Дальнейший этап — подчинение группы дополнительному требованию, чтобы сохранялось инвариантное выражение для некоторого фундаментального физического закона (или законов). Искомая группа определена на основе четырех постулатов, причем третий вводит «нормализированные» (аффинные) пространственно-временные системы отсчета, для которых координаты точки, двигающейся с постоянной скоростью (v_1, v_2, v_3), удовлетворяют уравнениям

$$x_i = v_i t + c_i.$$

В рассуждениях используются некоторые «естественные» предположения, которые не отражены в постулатах. В итоге преобразование, которое соответствует специальному лоренцову преобразованию, получает (после надлежащих растяжений осей) следующий вид:

$$x' = (x - vt)/\sqrt{|1 - \alpha v^2|}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$t' = (t - \alpha v x)/\sqrt{|1 - \alpha v^2|}$$

(эти формулы другим путем были получены различными авторами). Совокупность этих преобразований, соответствующих осям x, y, z, дополненная пространственными вращениями и трансляциями, образует искомую группу преобразований. Для определения константы α автор указывает на четыре возможные точки зрения: (A) принят принцип относительности и закон постоянства скорости света; (B) принят принцип относительности, но скорость света не считается постоянной; (C) не все законы природы инвариантны, но скорость света постоянна; (D) не все законы природы инвариантны, в частности, скорость света непостоянна.

(A) и (C) приводят к группе Лоренца. В случае (B) любой из законов природы может послужить для определения α. Случай (D) будет приводить к различным значениям α, соответственно избираемому фундаментальному закону.

Вопрос о применении полученных преобразований в квантовой физике остается открытым, так как ее принципы здесь не учитывались. *Б. Л. Лаптев*

3450 К. Смысл теории относительности. Э й н ш т е й н (The meaning of relatvity. E i n s t e i n A l b e r t, 4-th ed.. IV+163 pp., Princeton University Press. Princeton, N. J., 1953, 3.50 doll.) (англ.)

Поскольку основной текст и Добавление I остаются в этом издании неизменными, то в настоящем реферате обсуждается лишь Добавление II. Рефераты 2-го и 3-го изданий см. в Math. Rev., 1946, 7, 87; 1953, 14, 97. Настоящая форма данного Эйнштейном обобщения теории тяготения отличается от теорий, предложенных в предшествующих изданиях этой книги, тем, что уравнения поля выводятся из вариационного принципа. Рассматриваемая теория имеет дело с пространством несимметрической афинной связности Γ^i_{jk}. В этом пространстве задан несимметрический тензор g_{ij}, симметрическая часть которого используется для представления тяготения, а антисимметрическая связывается с электромагнитным полем. Уравнения поля выводятся из вариационного принципа

$$\delta \int L d\tau = 0,$$

где функция Лагранжа L является функцией от g_{ij} и Γ^i_{jk}, причем эти величины варьируются независимо. Функция L выбирается так, чтобы одним из вариационных уравнений было

$$(\sqrt{-g}\, g_{ik})_{jl} \equiv (\sqrt{-g}\, g_{ik})_{,l} - \sqrt{-g}\, g_{sk}\Gamma^s_{il} - \underset{+}{-}\sqrt{-g}\, g_{is}\Gamma^s_{lk} - \sqrt{-g}\, g_{ik}\Gamma^s_{ls} = 0,$$

где $g = \det \| g_{ik} \|$, запятая обозначает обычное дифференцирование, а черта под рядом индексов обозначает симметрическую часть объекта, индексы которого подчеркнуты.

Другое требование для выбора функции Лагранжа заключается в том, чтобы результирующие уравнения поля были эрмитовыми, т. е. чтобы они оставались инвариантными при заменах

$$g_{ik} \to \tilde{g}_{ik} = g_{ki} \text{ и } \Gamma^j_{ik} \to \tilde{\Gamma}^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}.$$

Эйнштейн нашел такую функцию Лагранжа:

$$\sqrt{-g}\, g^{ij} R^{**}_{ij} = \sqrt{-g}\, g^{ij} \left\{ R_{ij} + \Gamma_{\underset{+}{i;j}} - \right.$$

$$-\left(\frac{(\sqrt{-g})_{,i}}{\sqrt{-g}}\right)_{;j}\Bigg\},$$

где R_{ij} — тензор Риччи, образованный из Γ^i_{jk},

$$\Gamma_i = \Gamma^s_{\underset{\vee}{is}},$$

а символ $\vee$, помещенный под парой индексов, обозначает антисимметрическую часть так помеченного объекта.

В окончательных уравнениях поля g_{ij} не варьируются независимо, но подчинены условию

$$(\sqrt{-g}\, g^{\underset{\vee}{is}})_{,s}=0.$$

Понятие численного состава (Strength) уравнения поля введено, обсуждено и использовано для оправдания ограничения вариаций g_{ij}. Окончательные уравнения поля получены следующие:

$$(\sqrt{-g}\, g_{ik})_{;\underset{+-}{l}} = 0, \quad \Gamma_i = 0,$$

$$R_{ik} = 0, \quad R_{\underset{\vee}{ik,l}} + R_{\underset{\vee}{kl,i}} + R_{\underset{\vee}{li,k}} = 0.$$

Автор заключает Добавление II рядом «Общих замечаний относительно концепций и методов теоретической физики». В этом разделе он рассматривает роль понятия поля в физике и его связь с пространственно-временным континуумом. Он выражает свое убеждение в необходимости чистой теории поля и в том, что она должна исходить из обобщения теории тяготения для пустого пространства. *Тауб (A. H. Taub)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 805.

3451 К. Тензорное исчисление. Спейн (Tensor calculus. Spain Barry, VIII+125 pp., Oliver and Boyd, Edinburgh and London; Interscience Publishers, Inc., N. Y., 1953, 1. 55 doll.) (англ.)

Книга предназначается для студента, не знакомого с тензорным анализом, и дает сжатое и ясное изложение элементарных свойств римановых пространств. Исходя из понятия N-мерного пространства (не делается попытки дать сложное определение многообразия), вводятся векторы и тензоры и рассматривается риманов метрический тензор. Затем следуют краткое, но ясное изложение ковариантного дифференцирования, геодезических, параллелизма и кривизны с приложениями к поверхностям трехмерного пространства.

Следующие 20 страниц посвящены принципам теории упругости, а последняя глава показывает читателю, знакомому с физическими принципами специальной и общей теории относительности, как могут быть использованы в этой теории тензорные методы.

Книга может быть хорошим введением как для физика, занимающегося приложениями, так и для математика, который предпочитает иметь короткий обзор, прежде чем взять один из более объемистых учебников по дифференциальной геометрии.

Нейенхёйс (A. Nijenhuis)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1017.

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3452. О некоторых типах уравнений $f(x, y, z, p, q) = 0$. Булиган (Sur quelques types d'équations $f(x, y, z, p, q) = 0$. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 23, 2193—2195 (франц.)

Нормали к интегральным поверхностям уравнения

$$F = \alpha p^2 + \beta q^2 - (\alpha + \beta) + 2(Ap + Bq + Cpq) = 0, \quad (1)$$

где α, β, γ, A, B, C — функции от x, y, z, в каждой точке M образуют конус 2-го порядка $\gamma(M)$, в который можно вписывать ортогональные триэдры. Уравнение (1) определится, если в каждой точке пространства задать два таких триэдра. Например, можно взять две функции $v(M)$, $u(M)$, поверхности уровня которых являются решениями уравнения (1), и в каждой точке задать пару ортогональных касательных MT, MT' и MS, MS' к каждой поверхности уровня в качестве образующих конуса γ.

Интегралы $v(M)$ уравнения (1), для которых MT и MT' определяют главные направления, можно искать как совместные решения (1) и уравнения $G = Hr - 2Ks + Lt = 0$ (H, K, L — многочлены от q, p с коэффициентами, линейными относительно α, β, γ, A, B, C). Если линии уровня функций u, v, определяющих уравнение, являются семействами поверхностей двух различных триортогональных систем и в качестве ортогональных касательных выбраны касательные к главным направлениям, то уравнения (1) и $G = 0$ допускают по меньшей мере шесть интегралов.

Для определения уравнения $f = Aq + Bp + Cpq = 0$, допускающего интегралы x, y, z, достаточно задать еще один интеграл $v(M)$ и в каждой точке пару касательных MT, MT'. Условие $G = 0$ здесь будет:

$$Aqr + Bpt - (Ap + Bq + C)s = 0.$$

Исследуется возможность такого преобразования уравнения $f = 0$ в уравнение $f_1 = 0$ того же вида, при котором можно установить точечное соответствие, переводящее интеграл $v(M)$ первого уравнения в интеграл $v_1(M_1)$ второго. При этом в соответствующих точках касательные плоскости к линиям уровня этих интегралов параллельны, и конусы $\gamma(M)$ и $\gamma_1(M_1)$ также можно получить один из другого параллельным переносом. Доказано, что такое соответствие можно установить не для всякой пары уравнений данного типа. Если $v(M)$ задает одно из семейств триортогональной системы, то получается преобразование Комбескюра этой системы. *А. М. Васильев*

3453. Один способ отыскания триортогональных систем. Булиган (Une forme donnée à la recherche des systèmes triples orthogonaux. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 26, 2462—2463 (франц.)

Из предыдущего сообщения (реф. 3352) следует, что присоединением к триортогональной системе поверхностей (S) произвольной триортогональной системы (P) определяется уравнение в частных производных 1-го порядка, которому удовлетворяют поверхности обеих систем. Если система (P) состоит из плоскостей $x = c_1$, $y = c_2$, $z = c_3$ или $x - y =$

$= d_1$, $x + y = d_2$, $z = d_3$, то получатся уравнения вида

$$Ap + Bq + pq = 0, \quad Gp + Hq + \frac{p^2 - q^2}{2} = 0,$$

где A, B, G, H — функции от x, y, z. Следовательно, любую триортогональную систему (S) можно искать как систему трех общих интегралов двух уравнений указанного вида.

Три общих образующих конусов, определяемых в каждой точке указанными уравнениями и не параллельных оси Oz, образуют ортогональный триэдр, если

$$BG - AH + \frac{1}{2} = 0.$$

Учитывая это соотношение, условие существования общих интегральных поверхностей двух уравнений можно записать в виде

$$(A + q)(G_x p + H_x q) + (B + p)(G_y p + H_y q) -$$

$$- (G + p)(A_x p + B_x q) - (H - q)(A_y p + B_y q) -$$

$$- (G_z p + H_z q)(Ap + Bq) + (A_z p + B_z q)(Gp + Hq) = 0.$$

Остается записать условия принадлежности конуса 2-го порядка, определяемого в каждой точке этим уравнением, к пучку, порожденному конусами двух исходных уравнений.

По замечанию автора, определение триортогональных систем таким путем — трудное дело. Однако этот метод позволяет изучать триортогональные семейства поверхностей при более слабых требованиях относительно их гладкости, чем обычно.

А. М. Васильев

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3454. О диаметре полигона и о диаметрах тех полигонов, на которые он может быть разбит. Стейнбергер (On the diameter of a polygon and on the diameters of the polygons into which it may be divided. Steinberger Mëir), Riveon Lematematika, 1953, **6**, 34—40 (иврит; резюме англ.)

Автор исследует условия, при которых диаметр $\delta(V)$ полигона V (не обязательно связного) меньше (или равен) суммы диаметров субполигонов, составляющих полигон V. Результаты прилагаются к понятию «степени эквивалентности» $\sigma(V, W)$, т. е. наименьшему числу попарно конгруентных полигонов, на которые можно разложить полигоны V и W. Следствие теоремы: если V связно, то $\sigma(V, W) \geqslant \delta(V)/\delta(W)$; если V выпукло и неконгруентно W, то сохраняется строгое неравенство. Автор считает, что это улучшает результаты Тарского (Tarski A., Młody Matematyk, 1931, **1**, 37—44; Riveon Lematematika, 1951, **5**, 32—38).

Страус (E. G. Straus)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 901.

3455. Теорема Фари с ее элементарными приложениями. Фростман (En sats av Fáry med elementära tillämpningar. Frostman Otto), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 1, 25—32 (швед.)

Пусть v — угол между двумя прямыми в пространстве, $\varphi(\vec{n})$ — угол между их ортогональными проекциями на плоскость, имеющую нормаль $\vec{n}$. Теорема Иштвана Фари (Fáry I., Bull. soc. math. France, 1949, **77**, 128—138) утверждает, что среднее значение $\varphi(\vec{n})$ для всех направлений $\vec{n}$ равно

$$v = \frac{1}{4\pi} \int \varphi(S)\, dS,$$

где интеграл распространен по сфере с центром в вершине угла между прямыми.

Как следствия этой теоремы получаются предложения:

1. В трехгранном угле сумма двух плоских углов при его вершине больше третьего угла.

2. В выпуклом многогранном угле сумма всех его плоских углов при вершине меньше 2π.

3. В n-гранном выпуклом угле сумма двугранных углов больше чем $(n - 2)\pi$ и меньше чем $(n - 2)\pi +$ + сумма плоских углов при вершине.

4. Пусть O — внутренняя точка тетраэдра $ABCD$. Если через u обозначена сумма 6 углов, которые образуют между собой попарно прямые OA, OB, OC, OD, а через v — сумма 12 углов, которые образуют эти отрезки с ребрами тетраэдра (при его вершинах), то имеют место соотношения

$$u + v = 6\pi, \quad 2\pi < v < 3\pi < u < 4\pi.$$

5. Сумма двугранных углов в тетраэдре больше 2π и меньше 3π.

М. В. Потоцкий

3456. Некоторые простые геометрические экстремальные задачи. Тейлор (Some simple geometrical extremal problems. Taylor S. J.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 188—198 (англ.)

Рассматриваются некоторые экстремальные задачи, относящиеся к выпуклым замкнутым линиям. Приводим два примера.

Пусть Σ — класс выпуклых (замкнутых) линий, имеющих данную длину l $(0 < l < 2\pi r)$ и лежащих целиком в круге (круг с контуром) радиуса r. Какая линия из класса Σ ограничивает наименьшую площадь? При $0 < l \leqslant 4r$ решение тривиально: двойной отрезок длины $l/2$. При $4r < l \leqslant 2\pi r$ решением является однозначно определенный (с точностью до движения) многоугольник с $n + 1$ сторонами, вписанный в данную окружность, причем n его сторон имеют одинаковую длину a, а одна сторона имеет длину $b \leqslant a$.

Рассмотрим выпуклые линии данной длины l и данного диаметра d $(2d \leqslant l \leqslant \pi d)$. Известно, что наибольшая площадь получается в случае симметричной линзы, соответствующей данным параметрам. Ставится вопрос, какая из линий этого класса ограничивает наименьшую площадь. Рассмотрены лишь следующие два случая: 1) $l = \pi d$; ответ: треугольник Рело (фигура постоянной ширины, ограниченная тремя круговыми дугами, построенными на сторонах правильного треугольника как на хордах и имеющими центры в вершинах этого треугольника); 2) $2d \leqslant l \leqslant 3d$; ответ: равнобедренный треугольник со сторонами d, d, и $l - 2d$.

Рассматривается еще ряд аналогичных задач, относящихся: 1) к выпуклым многоугольникам, 2) к выпуклым линиям, лежащим целиком внутри треугольника Рело данных размеров.

Н. М. Бескин

См. также: 3242, 3249, 3273, 3274, 3275, 3326, 3338

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3457. О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. II. Сходимость конечно-разностного процесса для уравнения теплопроводности. Камынин Л. И., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 3, 249—268

Настоящая работа является продолжением предыдущей работы автора (РЖМат, 1953, 268). Уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при $t \geqslant 0$ и $x \in (-\infty, \infty)$ с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ сопоставляется система

$$\frac{\partial u^h(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}[u^h(x+h, t) - 2u^h(x, t) + u^h(x-h, t)], \tag{2}$$

$x = 0, \pm h, \pm 2h, \ldots$ с тем или иным начальным условием.

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|\ln(1+|x|)},$$

то решение системы (2), удовлетворяющее условию $u^h(x, 0) = \varphi(x)$, сходится при $h \to 0$ к интегралу Пуассона

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi. \tag{3}$$

2. Если $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|^{2-\delta}}, \tag{4}$$

то решение системы (2) с урезанными начальными данными

$$u_X^h(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant X \\ 0, & |x| > X \end{cases}$$

сходится к интегралу Пуассона (3) при $h \leqslant \frac{1}{X} \to 0$ и $X \to +\infty$. Однако конечно-разностный процесс при более «редком» шаге h может расходиться.

3) Если $\varphi(x)$ непрерывна и справедлива оценка (4), то решение урезанной системы (2) с краевыми условиями $u^h(\pm X, t) = 0$ и начальным условием $u^h(x, 0) = \varphi(x)$, $|x| \leqslant X$, сходится к интегралу Пуассона при $h \leqslant \frac{1}{X} \to 0$, $X \to +\infty$.

Доказательства всех перечисленных теорем базируются на конкретном представлении решения системы (2), найденном автором в предыдущей работе.

О. А. Ладыженская

3458. Численное решение уравнения распространения тепла. Миньо (Sur les solutions numériques du problème de la chaleur. Mignot Noël). C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 25, 2375—2377 (франц.)

Автор использует обозначения, определения и результаты своей предыдущей заметки (РЖМат, 1954, 2726). Методом конечных разностей решается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - B(x)u(x, t) = C(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$(K > 0,\ B \geqslant 0,\ C > 0)$$

с краевыми условиями, причем решение ищется разделением переменных, т. е. $u(j\Delta x, k\Delta t) = f(j\Delta x)\psi(k\Delta t)$.

Оказывается, что собственные значения λ для «определенной» и «самосопряженной» задачи при выполнении условия P удовлетворяют неравенству

$$0 < \lambda\Delta x^2 < 4 \max \frac{K}{C} = M.$$

Функция $\psi(k\Delta t)$ удовлетворяет разностному уравнению с постоянными коэффициентами

$$D[\psi(k\Delta t)] = -\lambda\Delta t M_\alpha(k\Delta t). \tag{1}$$

Разностная схема будет устойчива в слабом смысле (определение см. O'Brien, Morton, Hyman A., Kaplan S., J. Math. Phys., 1950, **29**, № 4, 223) тогда и только тогда, когда уравнение (1) не имеет корней по модулю бо́льших 1. Пусть $\times$ означает использованную точку, а $\bigcirc$ — точку, в которой дифференциальное уравнение заменяется разностным. Автор устанавливает, что схема $\begin{smallmatrix} & \times & \\ \times & \otimes & \times \\ & \times & \end{smallmatrix}$ устойчива при $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{2}{M}$, схемы

$\begin{smallmatrix} & \times & \\ \times & \otimes & \times \\ & \times & \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \times & \times & \times \\ & \bigcirc & \\ \times & \times & \times \end{smallmatrix}$ $\left[M_\alpha = \frac{\psi((k+1)\Delta t) - \psi(k\Delta t)}{2}\right]$,

$\begin{smallmatrix} & \times & \\ \times & \otimes & \times \\ & \times & \\ & \times & \end{smallmatrix}$ [использовано $y_2' \approx \frac{1}{2\Delta t}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$],

$\begin{smallmatrix} & \times & \\ \times & \otimes & \times \\ & \times & \\ & \times & \end{smallmatrix}$ [использовано $y_3' \approx \frac{\Delta t}{6}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)$]

устойчивы в слабом смысле, если задача «определенная», а схемы $\begin{smallmatrix} & \times & & & \\ \times & \otimes & \times & \times & \\ & \times & & \otimes & \times \\ & & & \times & \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & & \times & & \\ & \times & \otimes & \times & \\ \times & & \times & & \otimes \\ & & \times & & \end{smallmatrix}$ всегда неустойчивы. Заметка не содержит доказательств.

Примечание референта. Утверждение автора о том, что схема

$$\begin{smallmatrix} & \times & \\ \times & \otimes & \times \\ & \times & \\ & \times & \end{smallmatrix} \tag{2}$$

всегда неустойчива, неверно. Из работы В. С. Рябенького (Докл. АН СССР, 1952, **86**, № 6, 1071, теорема 3) следует, что для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

существует устойчивая разностная схема вида (2), а именно,

$$\frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \frac{1}{6\Delta t}[4u(t+\Delta t, x) - 3u(t, x) - u(t-2\Delta t, \alpha)],$$

где $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leqslant C$ (C — некоторая постоянная).

Л. И. Камынин

3459. О приближенном решении методом Чаплыгина обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной. Бабкин Б. Н., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 5, 634—638.

Развивается метод Чаплыгина (Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, ГТТИ, М.— Л., 1950) для приближенного решения уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Предполагается, что функции F, F'_y, $F'_{y'}$ непрерывны в некоторой замкнутой области D переменных x, y (содержащей точку (x_0, y_0)) при $|y'| \leqslant T$, причем $F'_{y'} \geqslant q > 0$.

Пусть гладкие кривые $y = u(x)$, $y = v(x)$, проходящие через точку (x_0, y_0), расположены при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ в области D и $\max|u'(x)| < T$, $\max|v'(x)| < T$. Доказывается, что из выполнения на сегменте $[x_0, x_1]$ неравенств

$$F[x, u(x), u'(x)] < 0, \qquad (2)$$

$$F[x, v(x), v'(x)] > 0 \qquad (3)$$

вытекает справедливость при $x_0 < x \leqslant x_1$ неравенств

$$u(x) < y(x) < v(x),$$

где $y(x)$ — решение уравнения (1), проходящее через точку (x_0, y_0) и удовлетворяющее условию $u'(x_0) < y'(x_0) < v'(x_0)$.

Пусть $|F'_y| < S$, $M > F'_{y'} \geqslant q > 0$ в области D_1: $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [u(x), v(x)]$, $|y'| \leqslant T$. Пусть $u_0(x) = u(x)$, $v_0(x) = v(x)$.

Автор конструирует последовательные приближения $u_n(x)$, $v_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, апроксимирующие решение $y(x)$ уравнения (1), как проходящие через точку (x_0, y_0) решения линейных уравнений

$$u'_{n+1} - \frac{S}{q}(u_n - u_{n+1}) + \frac{1}{M}F[x, u_n(x), u'_n(x)] - u'_n = 0,$$

$$v'_{n+1} - \frac{S}{q}(v_n - v_{n+1}) + \frac{1}{M}F[x, v_n(x), v'_n(x)] - v'_n = 0.$$

При построении функции $u_{n+1}(x)$ $(v_{n+1}(x))$ предполагается, что точки $[x, u_n(x), u'_n(x)]$ принадлежат области D_1 ($[x, v_n(x), v'_n(x)] \in D_1$). Эти условия, в частности, выполнены при всех n, если начальные приближения $u(x)$, $v(x)$ достаточно близки к искомому решению и если сегмент $[x_0, x_1]$ достаточно мал. Доказывается, что

1) $u_n(x) < u_{n+1}(x) < y(x) < v_{n+1}(x) < v_n(x)$, $(x_0 < x < x_1)$;

2) на сегменте $[x_0, x_1]$ функции $u_n(x)$ удовлетворяют неравенству (2), а функции $v_n(x)$ — неравенству (3);

3) $u'_n(x_0) < u'_{n+1}(x_0) < y'(x_0) < v'_{n+1}(x_0) < v'_n(x_0)$.

Доказывается, что последовательные «нижние» и «верхние» приближения $u_n(x)$, $v_n(x)$ равномерно сходятся на $[x_0, x_1]$ к $y(x)$. *М. А. Красносельский*

3460. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений вида $y'' - p(x)y = q(x)$. Бабкин Б. Н., Уч. зап. Молотовского гос. ун-та, 1953, 8, № 1, 7—9

Для уравнения $y'' - p(x)y = q(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ по заданным функциям $v(x)$ и $u(x) \in C_2([0, 1])$, удовлетворяющим данным начальным условиям и дифференциальным неравенствам $L[v] = v'' - p(x)v - q(x) > 0$ и $L[u] = u'' - p(x)u - q(x) < 0$, строятся последовательности верхних $\{v_n(x)\}$ и нижних $\{u_n(x)\}$ функций, монотонно сходящиеся к искомому решению $y(x)$ на $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{|m|}}\right]$, если $m < 0$ и $|m| > \pi^2$, и на всем полуинтервале $(0, 1]$ при $m \geqslant 0$, где $m = \inf\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1}\{p(x)\}$.

Попутно устанавливается, что теорема С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для уравнения $y'' - p(x)y = q(x)$ применима на $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{|m|}}\right]$ при $m < 0$ и $|m| > \pi^2$ и на $[0, 1]$ при $m \geqslant 0$.

На странице 9, строка 6 снизу, имеется опечатка: вместо $\{u_u(x)\}$ следует читать $\{u_n(x)\}$.

По поводу решения задачи в случае однородного уравнения см. Украинский мат. ж., 1952, **4**, № 3, 299—311; Прикл. математика и механика, 1952, **16**, № 6, 735—738. *К. В. Задирака*

3461. О некоторых дополнениях к методу Блесса. Боркман (Über einige Ergänzungen zum Blaeßschen Verfahren. Borkmann K.), Technik, 1953, **8**, № 7, 475—480 (нем.)

Естественное обобщение метода ломаных Эйлера применительно к уравнениям второго порядка

$$\ddot{y} = f(x, y, \dot{y})$$

с условиями

$$y_0 = y(x_0), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(x_0)$$

состоит в определении приближений по схеме

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + \tau\dot{\tilde{y}}_{i-1} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\tilde{y}}_{i-1},$$

$$\dot{\tilde{y}}_i = \dot{\tilde{y}}_{i-1} + \tau\ddot{\tilde{y}}_{i-1},$$

$$\ddot{\tilde{y}}_i = f(x_i, \tilde{y}_i, \dot{\tilde{y}}_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau = x_i - x_{i-1}$. Блесс предложил через каждые

лять шагов «улучшать» $\tilde{y}_5$, $\dot{\tilde{y}}_5$ по формулам

$$y_5 = \tilde{y}_5 + \frac{\tau^2}{2}\sum_{s=0}^{5}\delta_s \ddot{\tilde{y}}_s,$$

$$\dot{y}_5 = \dot{\tilde{y}}_5 + \tau\sum_{s=0}^{5}\varepsilon_s \ddot{\tilde{y}}_s,$$

где δ_s и ε_s имеют определенные числовые значения, не зависящие от f. Автор статьи предлагает аналогичные «поправочные» формулы для уравнений порядка $n = 3,4$. Коэффициенты в этих формулах вычисляются, с одной стороны, из тех соображений, чтобы значения $\tilde{y}_i^{(\nu)}$, $i = 1, \ldots, r$ (выше, например, $r = 5$), $\nu = 0, 1, \ldots, n$, отличались бы от значений, вычисляемых по формуле Тейлора

$$y_i^{(\nu)} = \sum_{s=0}^{n-\nu+r}\frac{(i\tau)^s}{s!}y_0^{(\nu+s)},$$

в некотором смысле мало, а с другой стороны, чтобы эти поправки не слишком усложняли вычисления. *О. А. Ладыженская*

3462. Нелинейный анализ электромеханических проблем. Гу (Nonlinear analysis of electromechanical problems. Ku Y. H.), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 1, 9—31 (англ.)

Изложение доклада, прочитанного автором на VIII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Стамбул; август 1952 г.). Работа содержит описание графического приема для приближенного построения решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + f_1(x) = F(t)$$

по заданным функциям f, f_1 и F и начальным условиям. Особенность приема состоит в предварительном построении в плоскости $x, \ddot{x}$ семейства кривых $\ddot{x} = -f(x, \dot{x}) - f_1(x)$ для разных значений $\dot{x} = \text{const}$. Предлагаемое графическое построение является обобщением построения Льенара, применяемого в радиотехнике и вошедшего во многие курсы по теории колебаний (см., например, Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952). В качестве примеров рассматриваются уравнение Ван-дер-Поля, уравнение маятника и уравнение явно полюсной синхронной электрической машины.

М. А. Айзерман

3463. Явление Гиббса при интерполировании функций с разрывами. Мерли (Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Merli Luigi), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur, 1953, 14, № 1, 18—21 (итал.)

Исходя из допущения, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $(-1, +1)$, кроме точки $x = 0$, где она имеет разрыв первого рода, автор показывает, что связанные с $f(x)$ интерполяционные многочлены Эрмита с узлами в нулях ультрасферического многочлена Гегенбауэра $P_n^{(\lambda)}(x)$ (т. е. многочлена Якоби $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при значениях параметров $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$) в предположении, что $0 \leqslant \lambda < 1/2$, сходятся равномерно к $f(x)$ во всяком частном замкнутом промежутке, не содержащем точки разрыва.

В. Л. Гончаров

3464. Явление Гиббса при интерполировании функций с разрывами. Мерли (Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Merli Luigi), Atti Accad. naz Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 2, 194—197 (итал.)

При интерполировании функции с характерным разрывом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

посредством многочленов Эрмита с узлами в нулях ультрасферического многочлена Гегенбауэра $P_n^{(\lambda)}(x)$ $(0 \leqslant \lambda < 1/2)$ минимум интерполяционного многочлена в промежутке между узлами, непосредственно примыкающими к узлу $x = 0$, стремится к нулю; это справедливо и для всякого следующего промежутка с фиксированным номером (считая от $x = 0$ в ту или иную сторону). *В. Л. Гончаров*

3465. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Васильев В. В., Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, 8, № 1, 22—27

Рассматривается интегральное уравнение

$$F[x, \varphi(x)] = \psi(x) + \lambda\int_a^b k(x, s) f[s, \varphi(s)]\, ds,$$

где $f(s, \varphi)$ — многочлен n-й степени относительно φ:

$$f(s, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}(s)\varphi^k(s),$$

$$k(x, s) = \sum_{p=1}^{m}\varphi_p(x)\psi_p(s),$$

$\varphi(x)$ — искомая функция.

Интеграл в правой части приближенно выражается по квадратурной формуле Гаусса с двумя ординатами x_1 и x_2; тогда после преобразований для $y = \varphi(x_1)$, $z = \varphi(x_2)$ получаются уравнения вида

$$\theta_1(y) = w_1(z), \quad \theta_2(z) = w_2(y),$$

где θ_1, θ_2, w_1, w_2 — известные функции. Автор предлагает приближенно решать эти уравнения следующим образом: нанеся на бумагу графики функций θ_1, θ_2, w_1, w_2, отыскивать четыре точки на этих графиках, лежащие в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Такое отыскание рекомендуется проводить при помощи прозрачного листа бумаги с нанесенной на него сеткой.

В конце работы приведен простой пример применения описанного метода. *А. А. Абрамов*

3466. О формулах численного дифференцирования. Гроссман Д. П., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 5, 777—779

Рассматриваются формулы численного дифференцирования вида

$$h^k f^{(k)}(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} f(a + ht_i) + R_k^{(n)}, \quad 0 < k < n.$$

Указана зависимость коэффициентов $c_i^{(k)}$ и остаточного члена $R_k^{(n)}$ от $t_1, t_2, \ldots, t_n$ при произвольном расположении точек $a_i = a + ht_i$.

Приведенные выражения для $R_k^{(n)}$ позволяют судить о порядке малости остаточного члена относительно h. В общем случае этот порядок не может быть сделан больше чем $n + k$. *В. А. Диткин*

3467. Об устойчивости плоских течений вязкой жидкости между двумя стенками. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 5, 569—578

Метод Галеркина для приближенного определения собственных значений применен к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости между двумя прямолинейными стенками.

Скорость основного течения зависит только от расстояния до стенок и выражается полиномом четвертой степени. Построена система полиномов, удовлетворяющая граничным условиям, и для одного случая распределения основной скорости с несимметрично расположенными точками перегиба проведены вычисления второго приближения. Получена зависимость критического числа Re от длины волны возмущения. Для одной длины волны вычислено третье приближение, давшее значение критического числа Re, очень близкое к полученному во втором приближении. *Г. И. Петров*

3468. О точности некоторых приближенных методов вычисления собственных чисел квадратных матриц. Бондарь Н. Г., Тр Днепропетровского ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1953, 23, 61—69

Как известно, наибольшее характеристическое число λ_{max} квадратной симметрической матрицы A, все характеристические числа которой положительны, можно приближенно определять по формуле

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2}(B_k + C_k),$$

где k — порядок приближения, а

$$B_k = \sqrt[2k]{\operatorname{Sp} A^{2k}}, \qquad C_k = \sqrt[k]{\frac{\operatorname{Sp} A^{2k}}{\operatorname{Sp} A^k}}$$

($\operatorname{Sp} M$ — след матрицы M).

Для предельной относительной погрешности k-го приближения $\delta(\lambda_{max})$ в работе предлагается формула

$$\delta(\lambda_{max}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2k]{2} - 1\right). \qquad (1)$$

Примечание референта. Формула (1), являющаяся основным результатом работы, ошибочна. Как следует из элементарных соображений,

$$\delta(\lambda_{max}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2k]{n} - 1\right),$$

где n — порядок матрицы. Ошибка в окончательном результате объясняется, видимо, ошибками в промежуточных рассуждениях. Так, например, в процессе вывода формулы (1) автор пользуется неравенством

$$2 \operatorname{Sp} A^2 \geqslant (\operatorname{Sp} A)^2, \qquad (2)$$

которое он, не доказывая этого, считает достаточным условием положительности характеристических чисел матрицы A. Формула (1) была бы верной, если бы неравенство (2) являлось необходимым условием положительности характеристических чисел матрицы A. Однако неравенство (2) не является ни достаточным, ни необходимым условием положительности характеристических чисел. Действительно, всякая матрица с равными по абсолютной величине и противоположными по знаку характеристическими числами удовлетворяет условию (2), а любая единичная матрица, все характеристические числа которой положительны, не удовлетворяет условию (2), если $n \geqslant 3$. *Я. Л. Нудельман*

3469. О применении в физике способа наименьших квадратов. Вернотт (A propos de l'application à la phisique de la méthode des moindres carrés. Vernotte Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 12, 605—606 (франц.)

Утверждается, что для правильного применения способа наименьших квадратов при нахождении параметров формулы, выражающей зависимость между явлениями x и y, нужно применить его отдельно к зависимостям $x(t)$ и $y(t)$, выраженным в виде функций некоторого переменного t (например, времени), частные значения которого t_i известны точно. После исключения t из двух зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ и получается искомое выражение физической зависимости $y(x)$. Применение способа наименьших квадратов непосредственно к нахождению параметров функции $y(x)$ связано с допущением, что частные значения x_i безошибочны, а несогласия в результатах опытов относятся только за счет ошибочности измеренных значений y_i. Это, вообще говоря, неправильно.

Для примера автор берет случай определения параметров A, B и C в формуле

$$y = Ax^2 + Bx + C, \qquad (1)$$

где

$$x = at^2 + bt + c. \qquad (2)$$

С учетом (2) формула (1) может быть написана так:

$$y = \alpha\left(t^4 + \frac{2b}{a}t^3 - \frac{b^3}{a^3}t\right) + \gamma\left(t^2 + \frac{b}{a}t\right) + \varepsilon. \qquad (3)$$

Применяя классический прием способа наименьших квадратов, автор сначала находит коэффициенты a, b и c из уравнений вида (2), а затем — коэффициенты α, γ и ε из уравнений вида (3). После этого параметры A, B и C искомой формулы (1) находятся так:

$$A = \frac{\alpha}{a^2}, \quad B = \frac{\gamma}{a} - \alpha\left(\frac{b^2}{a^3} + \frac{2c}{a^2}\right), \quad C = \varepsilon + \alpha\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2 c}{a^3}\right) - \gamma\frac{c}{a}.$$

В. В. Попов

3470. Замечание о применении полиномов к наблюдениям через равные интервалы. Гест (Note on the fitting of polynomials to equally-spaced observations. Guest P. G.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 68 — 71 (англ.)

При применении полиномов к наблюдениям через равные интервалы обычно используются ортогональные моменты, вычисляемые по таблицам ортогональных полиномов. Когда же наблюдения производятся не через равные интервалы, используются степенные моменты. В заметке показано, что в случае равных промежутков метод, основанный на использовании степенных моментов, так же удобен, как и метод, использующий таблицы ортогональных полиномов.

Дается схема вычислений, и приводится пример определения коэффициентов полинома с оценкой их точности при 62 наблюдениях. *В. В. Попов*

3471. Практическое вычисление эллиптической функции Якоби «sn» с особым учетом определения параметра Кауэра для фильтров, обладающих рабочим затуханием. Фетцер (Die praktische Berechnung der elliptischen Funktion «sn» von Jakobi unter besonderer Berücksichtigung der Bestimmung der Cauer-Parameter für Filter mit Betriebsdämpfungsverhalten. Fetzer Viktor), Arch. electr. Übertrag, 1953, **7**, № 8, 393—401 (нем.)

Как показала практика расчета фильтров, точность имеющихся таблиц эллиптических функций оказывается недостаточной. Указывается, как можно при помощи хорошо известных разложений и свойств эллиптических функций выполнить вычисление их с нужной степенью точности. Так, например, полный эллиптический интеграл первого рода

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m \sin^2 \psi)^{-1/2}\, d\psi$$

предлагается вычислять при помощи разложения его в ряд по степеням модуля m или при помощи ряда по степеням дополнительного модуля $m_1 = 1 - m$. Указывается также на возможность использования для вычислений гауссова процесса арифметико-геометрических средних.

Эллиптический синус $\mathrm{sn}\, u$ рекомендуется находить либо при помощи степенного ряда по степеням u, либо при помощи тригонометрических рядов и др. В конце статьи приведена небольшая справочная таблица расчетных формул. *В. И. Крылов*

3472. Об одной функциональной задаче номографии. Бельграно Брémард (Sur un problème de calcul fonctionnel posé par la nomographie. Belgrano Brémard J. C.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, сер. 4, **13**, № 1—2, 81—86 (франц.)

Уравнение вида

$$z = H\,[f_{12}(z_1, z_2) + \lambda(u),\ g_{12}(z_1, z_2)] \qquad (1)$$

допускает «барицентрические» или «ромбоидальные» номограммы, которые изучали Лопиш Нету (López Nieto A., Rev. mat. hisp.-amer., 1951, **11**, № 3, 191—207) и Урселай (Urcelay J. M., Gaceta mat., 1951, № 6). Номографическое представление (1) состоит из шкалы E_u (переменной u), поля R_{12} (переменных z_1, z_2) и семейства кривых F_z (переменной z). Пусть параметрические уравнения этих линий будут:

$$E_u\colon\ x = \lambda(u), \qquad y = 0,$$
$$R_{12}\colon\ x = f_{12}(z_1, z_2), \quad y = g_{12}(z_1, z_2)$$
$$F_z\colon\ z = H(x, y).$$

Если P — точка поля R_{12}, Q — точка шкалы E_u, C — кривая семейства F_z, причем система соответствующих P, Q, R значений переменных z_1, z_2, u, z является решением (1), то $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OQ}$, где R — пересечение с кривой C параллели к оси Ox, проведенной через точку P.

По вопросу изображения ромбоидальными номограммами функций, заданных таблично (задача табличной идентификации), автор отсылает к выходящему из печати его курсу номографии (Traité de nomographie). Вопрос об аналитических условиях представимости функций номограммами данного типа (задача аналитической идентификации) автор приводит к задаче интегрирования системы трех уравнений в частных производных первого порядка. *П. В. Николаев*

3473. Номограмма для испытаний в случайных группах. Лич, Гранди (A nomogram for assays in randomized blocks. Leech F. B., Grundy P. M.), Brit. J. Pharmacol. and Chemotherapy, 1953, **8**, № 3, 281—285 (англ.)

Подробно излагается теория построения и проективного преобразования номограммы для уравнения

$$(4D - 3B\mu)^2 = Nt^2s^2\,(96 + 36\,\mu^2),$$

встречающегося в приложениях статистического метода в биологии. Приводится расчет шкал. *Г. Е. Джемс-Леви*

3474. Номографический способ определения декрементов и периодов (колебаний) линейных систем четвертого порядка. Стефаняк (Ein nomographisches Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstanten und Schwingungsdauern eines linearen Systems vierter Ordnung. Stefaniak H.), Regelungstechnik, 1953, **1**, № 9, 211—212 (нем.)

Изложен способ построения номограммы, позволяющей по коэффициентам дифференциального уравнения, приведенного к виду

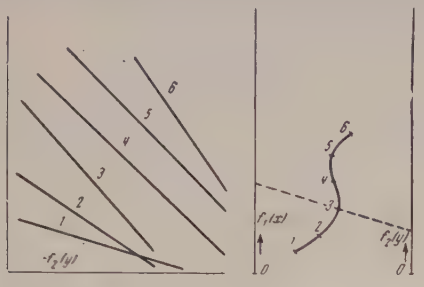
$$\frac{d^4x}{dt^4} + A_3\frac{d^3x}{dt^3} + A_2\frac{d^2x}{dt^2} + A_1\frac{dx}{dt} + x = 0, \qquad (1)$$

определить некоторые вспомогательные величины, через которые весьма просто выражаются корни характеристического уравнения, соответствующего (1), и, следовательно, декременты и периоды свободных колебаний. *Я. З. Цыпкин*

3475. Использование номограмм для выявления функциональной зависимости между опытными данными. Мапстон (Simplifying data correlations by nomographs. Mapstone George E.), Petrol. Refiner, 1953, **32**, № 1, 119—123 (англ.)

Если результаты отдельных серий наблюдений изображаются прямыми (фиг. 1), то для установле-

ния, имеется ли закономерная связь между прямыми, предлагается перестроить график (фиг. 1) в номо-



К реф. 3475

Фиг. 1

Фиг. 2

граммy из выравненных точек (фиг. 2). Точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* номограммы отвечают прямым *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* графика. Если точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* располагаются на плавной кривой, то искомая зависимость имеет вид

$$f_1(x) = A[f_2(y)] + B,$$

где A и B — различные функции одного и того же параметра. Рассмотрены частные случаи, когда прямые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* образуют семейства параллельных прямых и пучок прямых. *Г. С. Хованский*

3476. Номограммы по организации строительных работ. Гольдман (Nomogramme zur Arbeitserleichterung. Goldmann Konrad), Bauzeitung, 1953, **7**, № 18, 517—519 (нем.)

3477. Номограммы, применяемые при анализе данных реакции $Li^6(n,\alpha)H^3$. Боас (Nomograms used in analysis of data in the reaction $Li^6(n,\alpha)H^3$ Boas Mary L.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, №5, 356—359 (англ.)

Приводятся три номограммы, построенные для формул:

$$\text{поправка к } \Sigma R = 0{,}46\,[T^2 + (2{,}9\delta/\Sigma R)^2]\,(\Sigma R - 45), \quad (1)$$

$$\cos\theta = \sin D_\alpha \sin D_T + \cos D_\alpha \cos D_T \cos\theta_m, \quad (2)$$

$$\sin\nu \sin\theta = \delta_\alpha/R_\alpha \sin\varphi + \delta_T/R_T \sin(\theta - \varphi). \quad (3)$$

Для формулы (2) построена номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами θ и φ и бинарным полем (D_α, D_T). Для формул (1) и (3) построены номограммы с использованием принципа сложения счетной линейки. Номограмма для формулы (1) состоит из двух подвижных z-номограмм (переменное ΣR повторяется в номограмме два раза). Номограмма для формулы (3) состоит из двух подвижных однотипных бинарных полей, состоящих из семейства концентрических полуокружностей и радиусов. Номограмма для формулы (3) оригинальна. *Г. С. Хованский*

3478. Номограмма для определения расстояний между отверстиями на окружности центров. Кислер (Leitertafel zur Bestimmung des Abstandes von Löchern auf Lochkreisen. Kiesler Fritz), Ind.-Anzeiger, 1953, **75**, № 55, 709—711 (нем.)

Статья пропагандирует применение номографии. На примере формулы $s = d \sin \frac{180^\circ}{n}$, применяемой для определения расстояний между точками при делении окружности на n частей, подробно излагается элементарная теория построения номограмм из выравненных точек на параллельных шкалах. *Г. Е. Джемс-Леви*

См. также: 3297, 3316, 3325, 3333, 3334, 3339, 3340, 3343, 3345, 3348, 3349, 3369, 3381, 3406, 3415, 3474

АЛГЕБРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3479. Алгебраическая теория линейных цепей передачи. Часть 1. Арсов (The algebraic theory of linear transmission networks. Part I. Arsove Maynard G.), J. Franklin Inst., 1953, **255**, № 4, 301—318 (англ.)

Автор статьи, совершенно не касаясь вопросов физической осуществимости, чисто алгебраически исследует линейные $2n$-полюсники с n входными и n выходными полюсами.

Линейными цепями здесь называются линейные преобразования $e = Zi$, где e и i — k-мерные комплексные векторы, а Z — матрица k-го порядка с комплексными элементами. Векторы e и i называются соответственно вектором э. д. с. и вектором тока, а Z — матрицей импедансов. Аналогично, исключительно в алгебраических терминах, определяются понятия симметричной цепи, цепи индекса p с фиксированными полюсами, пассивной и активной цепи, внешней тождественности цепей, последовательного и параллельного резонанса, цепи канонического вида с фиксированными полюсами.

Доказано (теорема 1), что всякая цепь с фиксированными полюсами при отсутствии параллельного резонанса может быть приведена к каноническому виду.

Далее рассматриваются последовательные (точнее, каскадные) соединения $2n$-полюсников с n входными и n выходными полюсами. Совокупность таких многополюсников образует полугруппу относительно операции их каскадного соединения.

Линейной цепью передачи автор называет $2n$-мерное аффинное преобразование вида

$$\begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \iota \end{pmatrix},$$

где e, i, e', i', ε и ι — n-мерные векторы, а α, β, γ, δ — матрицы порядка n.

Матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ называется матрицей передачи, $\begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} e' \\ i' \end{pmatrix}$ — входным и выходным вектором соответственно.

Для группы Γ всех неособенных цепей передачи доказана следующая теорема (теорема 2):

Каждая цепь передачи N в Г может быть выражена как последовательное соединение $N = N_1 \cdot N_2$ двух цепей передачи N_1 и N_2, обладающих следующими свойствами: 1) N_1 и N_2 соответствуют каноническим цепям с фиксированными полюсами, причем цепь, соответствующая N_2, симметрична и пассивна; 2) N_2 имеет матрицу передачи вида $\begin{pmatrix} U_n & 0 \\ \gamma_2 & U_n \end{pmatrix}$, где $\gamma_2^* = \gamma_2$, т. е. γ_2 — симметричная матрица.

При помощи этой теоремы доказывается теорема 3, дающая простой критерий для определения того, когда цепь передачи ведет себя как построенная из симметричных импедансов

Далее доказывается теорема, утверждающая, что совокупность всех импедансно-симметричных цепей передачи образует унимодулярную подгруппу группы Г.

Рассматриваются симметричные секции цепей передачи, относительно которых доказываются теоремы 5 и 6; в первой формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы цепь передачи была симметричной секцией, а во второй утверждается, что каждая группа симметричных секций является абелевой.

Введенные в работе определения и полученные общие результаты поясняются несколькими примерами, содержащими чертежи схем, из которых становится ясным физический смысл этих определений и результатов. *В. И. Шестаков*

3480. Алгебраическая теория линейных цепей передачи. Часть II. Арсов (The algebraic theory of linear transmission networks. Part II. Arsove Maynard G.), J. Franklin Inst., 1953, **255**, № 5, 427—444 (англ.)

Определяются понятия сопротивления (проводимости) нагрузки, входного сопротивления (проводимости), итеративного и характеристического сопротивления (импеданса), линии передачи, симметричной линии передачи и итеративного сопротивления (импеданса) линии.

Одним из главных результатов этой части работы является теорема 14 о необходимых и достаточных условиях существования характеристического сопротивления (импеданса) пассивной цепи передачи. Приведенное доказательство этой теоремы использует теорию аналитических функций матриц.

В конце статьи теория непрерывных полугрупп используется для строгого определения и строгого рассмотрения многопроводных линий передачи. Линия передачи определяется здесь как полугруппа Σ_r пассивных цепей передачи $N(\xi)$, обладающая следующими свойствами: 1) для каждой пары неотрицательных чисел ξ_1 и ξ_2 справедливо равенство $N(\xi_1)N(\xi_2) = N(\xi_1 + \xi_2)$; 2) для каждого фиксированного входного вектора t выходной вектор $t'(\xi)$ передачи $N(\xi)$ дифференцируем для всех $\xi \geqslant 0$; 3) $N(0)$ имеет неособенную матрицу.

Всякая цепь $N(\xi)$ называется отрезком длины ξ линии передачи Σ_r. Для определенных таким образом цепей передачи доказана следующая теорема (теорема 16):

Если ω — производящая (generating) матрица для линии передачи Σ_r, то каждый отрезок $N(\xi)$ этой линии имеет матрицу передачи $\chi(\xi) = \exp(\xi\omega)$.

Обратно, для любой данной $2n$-мерной матрицы ω существует однозначно соответствующая ей линия передачи с производящей матрицей ω, где

$$\omega = \frac{d\chi(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=0}.$$

Матрица χ есть та матрица передачи $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, которая встречалась в определении цепи линейной цепи передачи (см. реф. 3479).

Последний параграф статьи посвящен рассмотрению практически наиболее важного частного случая линий передачи — симметричных линий. Здесь, как и в первой части статьи, автор рассматривает цепи и линии передачи чисто алгебраически, почти совершенно не касаясь вопросов физической реализации этих цепей и линий.

В статье даны определения всех введенных понятий и доказательства всех сформулированных теорем. *В. И. Шестаков*

3481. Очерк алгебры переключающихся схем. Шекел (Sketch for an algebra of switchable networks. Shekel Jacob), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 7, 913—921 (англ.)

Для анализа и синтеза схем, содержащих как переключатели, так и переключаемые сопротивления, предлагается специальная «алгебра», являющаяся объединением булевой алгебры с обычной алгеброй (полем комплексных чисел).

Следует отметить, что вопрос об установлении связи между основными операциями булевой алгебры и операциями поля комплексных чисел уже решен (Шестаков В. И., Ж. техн. физики, 1941, **11**, № 6, 532—549).

Большая часть статьи посвящена интерпретации этой алгебры посредством схем. Члены алгебраических выражений интерпретируются либо как сопротивления, либо как проводимости. Приведено несколько примеров анализа и синтеза схем. В приведенных примерах синтеза встречаются только уже известные схемы.

Сделанная в статье попытка построения алгебры схем, содержащих как конечные сопротивления, так и контакты переключателей или реле, обладает рядом недостатков. В этой «алгебре» одинаковыми знаками обозначаются операции, различные по своим свойствам, и один и тот же символ 1 используется как для обозначения элемента булевой алгебры, так и единицы поля комплексных чисел. Это может привести к противоречиям. Действительно, если знак + означает булево сложение, то имеем равенство $1 + 1 = 1$. Если же знак + означает обычное сложение, а символ 1 — единицу поля комплексных чисел, то имеем равенство $1 + 1 = 2$.

Для того чтобы избежать подобного рода противоречий, автор вводит специальный символ S, по смыслу обозначающий величину, стремящуюся к ∞; S подчинен условию: $xS = 0$ при $x = 0$.

Используя малые буквы для обозначения элементов булевой алгебры, а большие буквы для обозначений любых комплексных чисел, автор применяет выражения $xS + Y$, xY соответственно для обозначения параллельного и последовательного соединения контакта x с двухполюсником, имеющим проводимость Y.

В случае же, когда двухполюсники обозначаются их сопротивлениями (а не проводимостями),

первое из этих выражений означает последовательное, а второе — параллельное соединение контакта x с двухполюсником, имеющим сопротивление Y.

Легко видеть, что используемые автором обозначения не могут быть обобщены на случай соединения нескольких двухполюсников, имеющих конечные сопротивления. Например, выражение $Y_1 \cdot Y_2$ в общем случае нельзя считать обозначением последовательного соединения таких двухполюсников с проводимостями Y_1 и Y_2, ибо проводимость последовательного соединения таких двухполюсников не равна произведению их проводимостей.

В. И. Шестаков

3482. Коэффициенты допусков для *RC*-цепей. Белов (Tolerance coefficients for $R-C$ networks. Belove Charles), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 6, 745—747 (англ.)

Описан метод вычисления отклонения действительного поведения *RC*-цепи от расчетных данных, вызванного тем, что параметры цепи (сопротивления и емкости) могут быть осуществлены лишь с некоторыми допусками.

Метод заключается в определении ряда коэффициентов (коэффициентов допусков), связывающих относительные изменения параметров цепи с относительными изменениями положения нулей и полюсов функции цепи.

Коэффициентами допусков называются величины, заключенные в квадратные скобки в выражении

$$\frac{dT_a}{T_a} = \left[\frac{T_{11}}{T_a} \cdot \frac{\partial T_a}{\partial T_{11}}\right]\frac{dT_{11}}{T_{11}} + \left[\frac{T_{12}}{T_a} \cdot \frac{\partial T_a}{\partial T_{12}}\right]\frac{dT_{12}}{T_{12}} + \cdots,$$

где $T_a = f(T_{11}, T_{12}, \ldots)$ — функция постоянных времени $T_{11} = R_1C_1$, $T_{12} = R_1C_2, \ldots$ рассматриваемой цепи.

Величины T_a, $T_b, \ldots$ определяются из уравнения $(T_ap + 1)(T_bp + 1)\ldots = 0$, т. е. из уравнения

$$p^n\Delta = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p^1 + a_0 = 0,$$

где Δ — главный определитель данной цепи.

Доказываются следующие теоремы:

1. Сумма коэффициентов допусков для сопротивлений равна единице (аналогично для емкостей).

2. Корни характеристического уравнения (главного определителя) любой *RC*-цепи, выраженные через постоянные времени, могут только возрастать (убывать) при возрастании (убывании) любого сопротивления или любой емкости этой цепи.

Указывается, что описанный метод при соответствующем изменении обозначений применим для *RL*- и *LC*-цепей, а также для аналогичных этим цепям механических систем.

В. И. Шестаков

3483. Особые контакты и контакты замедленных реле в алгебре переменных цепей. Беллони (I contatti speciali e quelli dei relé ritardati nell'algebra dei circuiti variabili. Belloni Carlo), Ingegnere, 1953, **27**, № 3, 287—291 (итал.)

Утверждается, что для анализа и построения релейно-контактных схем возвратного действия (называемых автором рефлексными схемами) необходимо учитывать коммутационные интервалы, т. е. интервалы времени, в течение которых совершаются передвижения контактов.

Для обозначения различных состояний контактов и реле применяются обозначения, являющиеся развитием символики Монтгомери (Montgomerie G. A., J. Instn Electrical Engrs, 1948, **95**, ч. II, 355—364). Каждый рассматриваемый в статье случай работы реле иллюстрируется временными диаграммами. Статья существенно новых результатов не содержит. В конце дан пример синтеза элементарной схемы с блокировкой на включение.

Примечание референта. В статье имеется несколько ошибок, в частности в приведенном примере. Для исправления ошибки необходимо заменить равенство $c_0 \cdot c_\lambda = 0$ равенством $c_0 \cdot c_\lambda = c_0^r$.

В. И. Шестаков

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

3484. Вычислительная машина CRC-105. Спрэйг (CRC 105 computer. Sprague Richard E.), Aero Digest, 1953, **67**, № 2, 48, 50, 52, 55 (англ.)

Цифровая машина для решения дифференциальных уравнений CRC-105 (РЖМат, 1953, 488; 1954, 2383) в отличие от машин МЭДДИДА и CRC-101, проектировалась так, чтобы в возможно большей степени учесть требования к удобству эксплуатации, легкости программирования, обеспечить более широкие вычислительные возможности. Машина CRC-105 отличается от указанных выше рядом особенностей:

1. Имеются устройства для умножения на постоянную величину. В CRC-105 имеется 60 таких устройств, что позволяет использовать по прямому назначению интеграторы, отводившиеся ранее для этой цели.

2. Любой из 60 имеющихся в машине интеграторов при помощи специального кода может быть превращен в «ограничитель», ограничивающий изменение функции заданными положительной и отрицательной величинами.

3. Ввод и вывод данных, а также сами вычисления производятся в десятичной системе. Число десятичных разрядов, по ранее опубликованным данным, равно 6 плюс один разряд для знака (РЖМат, 1953, 488).

4. Для удобства повторения расчетов введено специальное устройство для запоминания начальных условий, позволяющее повторять решение без затраты времени на ввод данных.

5. Предусмотрено запоминание приращений, которое повышает точность вычислений и устраняет погрешности, возникающие при продолжении прерванных вычислений.

6. Предусмотрено печатание начальных условий для контроля правильности введенных данных.

7. Любой интегратор при помощи специального кода может быть превращен в «разрешающий ин-

тегратор», который позволяет или не позволяет поступающим в него от другого интегратора, от устройства внешнего ввода и т. п. данным проходить к следующим интеграторам. Это делается в зависимости от знака интеграла в дополнительном интеграторе и дает возможность вводить в действие в различное время различным группам интеграторов; вводить различные функции из устройств внешнего ввода; изменять величину шага интегрирования и т. п.

Устройство ввода CRC-105 позволяет полностью заполнять машину данными за 10—20 мин. Вывод результатов производится печатанием их на телетайпе или вычерчиванием в виде графиков при помощи автоматического построителя кривых.

Анализатор CRC-105 используется для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторых видов уравнений в частных производных, а также задач линейной алгебры.

Н. Я. Матюхин

3485. Электронная вычислительная машина Высшего исследовательского института. Эстрин (The electronic computer at the Institute for Advanced Study. Estrin Gerald), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 108—114 (англ.)

Основные характеристики, перечень операций и краткое описание автоматической цифровой вычислительной машины, построенной Высшим исследовательским институтом в Принстоне (РЖМат, 1953, 930, 931). Машина оперирует с 40-разрядными двоичными числами в системе с фиксированной запятой. Числа в машине по модулю не превышают единицы, отрицательные величины представляются дополнительным кодом. Арифметическое устройство параллельного типа состоит из трех 40-разрядных триггерных регистров и сумматора.

Время пробега единицы переноса 12 *мксек.*; время на выполнение команды сложения 60 *мксек.*, деления 1100 *мксек.*, среднее время выполнения команды умножения 700 *мксек.* Применена система сокращенного умножения, что уменьшает время на умножение от 990 *мксек.* при множителе, имеющем во всех разрядах «1», до 435 *мксек.* при множителе, имеющем во всех разрядах «0».

Один из трех регистров арифметического устройства используется для связи с запоминающим устройством. Запоминающее устройство параллельное, электростатического типа на обычных электронно-лучевых трубках типа 5CP1A. Емкость запоминающего устройства 1024 числа, рабочая частота 40 *кгц*. Коэффициент допустимого числа обращений к одному элементу 30. Число ламп в каждом разряде электростатической памяти 11 (не считая трубки).

Четвертый регистр машины служит для хранения команд. Система программирования одноадресная. Каждая команда занимает 20 разрядов, из которых 10 отводятся для кода адреса числа, а другие 10 — для кода операции.

Число операций в машине 20. Под код операции отведено 10 двоичных разрядов с целью упростить оборудование за счет исключения сложного диодного дешифратора для расшифровки кодов.

В список операций входит 9 вариантов команды сложения, умножение (с округлением), деление, сдвиги вправо и влево, передача числа в регистр, запись числа в ячейку запоминающего устройства, условный и безусловный переходы, команды управления устройствами ввода и вывода. Устройства для ввода и вывода состоят из перфоратора и репродуктора фирмы ИБМ и телетайпа с трансмиттером.

Скорость считывания и перфорации карт 100 штук в 1 мин., на каждой карте хранится 12 чисел. Ввод с перфоленты производится со скоростью 125 чисел в 1 мин., вывод на телетайп 32 числа в 1 мин. В процессе налаживания находится промежуточное запоминающее устройство с магнитным барабаном.

Полное число ламп в машине 2300, потребляемая мощность 16 *квт*, размеры 0,6 × 2 × 2,5 *м*. Приведена фотография.

Машина пущена в пробную эксплуатацию с июня 1952 г. Проектные скорости еще не достигнуты (данные о них не приведены.— *Прим. реф.*).

Н. Я. Матюхин

3486. СЕАК. Гринуолд, Хоэтер, Александер (SEAC. Greenwald Sidney, Haueter R. C., Alexander S. N.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1300—1313 (англ.)

Описывается электронная цифровая вычислительная машина СЕАК, находящаяся в Национальном Бюро Стандартов в Вашингтоне. СЕАК является машиной последовательного действия. Машина оперирует с 45-значными двоичными числами и может выполнять 16 различных операций. Используются трехадресная и четырехадресная системы команд; основная частота 1 *Мгц*.

СЕАК имеет два вида оперативной памяти: акустическую и электростатическую. Акустическое запоминающее устройство содержит 64 ртутные трубки с общей емкостью хранения 512 кодов; электростатическое запоминающее устройство представляет собой параллельную память, оно содержит 45 электронолучевых трубок типа 5UP1 и 3KP1. Время выборки чисел из него 12 *мксек.* Для ввода и вывода данных применяются магнитная лента и магнитная проволока.

В машине в основном применяются кристаллические диоды; электронные лампы используются лишь для усиления мощности. Всего насчитывается 1300 электронных ламп и 16 000 кристаллических диодов. Преобладающей схемой связи является трансформаторная.

Приводятся блок-схемы основных узлов машины и дается описание этих схем. Рассматриваются особенности выполнения принципиальных схем машины на примере вентильной схемы.

Подробно рассматриваются методы синхронизации импульсов.

Все устройство, кроме ртутной памяти и оборудования ввода и вывода, располагается на 18 стойках. На каждой стойке находится в среднем по 4 шасси. Внешний вид шасси приводится на фотографии. Описываются некоторые особенности конструкции.

Указывается, что машина работает в течение трех лет круглосуточно по 7 дней в неделю. Проверка надежности машины осуществляется при помощи стандартных тестов. Кроме того проводится проверка запаса надежности работы машины изменением наиболее чувствительных напряжений. Все лампы контролируются раз в 3 месяца, кристаллические диоды — раз в 6 месяцев. Рассматривается несколько способов проверки машины при помощи тестов. В таблице приводится скорость выполнения

машиной различных операций. Так, максимальное время сложения двух чисел в случае применения акустической памяти равно 1,34 мсек. Операция умножения занимает 3,65 мсек. При применении электростатической памяти время сложения равно 0,24 мсек. Время умножения 2,35 мсек.

А. Н. Зимарев

3487. Использование на машине СЕАК подпрограмм для численного интегрирования дифференциальных уравнений и квадратур Гаусса. Рабинович (The use of sub-routines on SEAC for numerical integrations of differential equations and for Gaussian quadrature. Rabinowitz P.), Proceedings of the Association for Computing Machinery. Washington, D. C. Sauls Lithograph Co., 1953, 88—89 (англ.)

Отмечается отличие программ для численного интегрирования дифференциальных уравнений и численных квадратур от обычных стандартных программ, используемых, например, для вычисления простых функций, которые обычно оперируют с одним аргументом и выдают единственный результат. В этом случае, в целях стандартизации, целесообразно размещать аргументы всегда в одной и той же ячейке памяти и результат получать там же, а также выделить определенную группу ячеек для оперативной памяти. В случае программ для численного интегрирования дифференциальных уравнений и численных квадратур приходится поступать иначе, поскольку такие программы могут включать в себя различные подпрограммы и требуется запоминание промежуточных результатов.

Рассматриваются два основных класса методов численного интегрирования: одношаговый [вычисляется $y(x+h)$ при известных x, $y(x)$, h] и разностный [вычисляется $y(x+nh)$ при известных $y(x)$, $y(x+h),\ldots, y(x+(n-1)\cdot h)$; $n \geqslant 2$], анализируются их достоинства и недостатки с точки зрения цифровых машин. Указывается, что для машины СЕАК приготовлен ряд программ для различных методов, сами программы не приводятся.

Для выполнения численных квадратур на цифровых машинах автор предлагает метод Гаусса и рассматривает применимость этого метода в зависимости от поведения подинтегральной функции.

Н. П. Трифонов

3488. Быстродействующие цифровые машины и их применение к задачам прикладной механики. Александер (High speed digital computers and their application to problems of applied mechanics. Alexander S. N.), Digital and Analog Computers and Computing Methods. Symposium at the 18th Appl. Mech. Div. Conf. of the ASME held at the Univ. of Minnesota, June 18—20, 1953, New York, 36—46 (англ.)

В начале статьи дается краткое введение, характеризующее современные автоматические счетные машины, в котором автор, в частности, указывает на неправильность термина «механический мозг» и сравнивает автоматическую цифровую машину с промышленным конвейером — линией сборки массовой продукции.

Далее характеризуются вкратце некоторые расчеты по прикладной механике, проведенные в 1951—1953 гг. на машине СЕАК (SEAC), в основном из области нелинейной теории упругости и пластичности, а также прикладной аэродинамики. Для одной из задач, по которой ранее велись расчеты на счетно-аналитических машинах, переход на СЕАК дал ускорение приблизительно в 300 раз. Более детально рассматривается задача о динамических нагрузках при посадке самолета. При решении этой задачи требуется обращать матрицу 13-го порядка. При использовании итеративной схемы Ланцоша (Lanczos C., Hestenes M. R., Stiefel E., Nat. Bur. Standards Report 1659, March 1952) для этого требуется около полумиллиона операций, которые СЕАК делает за 14 мин. При этом 450 ячеек памяти занимаются программой и 170 ячеек — начальными данными. В дальнейших расчетах приходится прибегать к запоминающему устройству на магнитной ленте, в связи с чем средняя скорость выполнения операций снижается до 30 000 в 1 мин.

Приводятся средние показатели работы СЕАК за три года. Из 168 недельных часов около 65% отводилось на вычисления и около 73% из этих часов было действительно использовано. Автор считает, что в дальнейшем показатели улучшатся.

Отмечается, что хотя навыки по программированию приобретаются довольно легко, процесс программирования является кропотливым делом. Указывается на желательность участия в работе по программированию составителя задания и на возможность проведения этой работы без машины, даже в другом городе.

Простота смены задачи на СЕАК (требуется около 10 мин.) облегчает эксплуатацию машины и позволяет работать на ней нескольким группам по суточному графику.

Автор отмечает, что машину будет трудно загрузить задачами обычного среднего объема, а для задач большого объема может потребоваться более мощное оборудование.

В приложении дан перечень 13 расчетов по прикладной механике, проводившихся на СЕАК, и список литературы (15 назв.), в том числе содержащей результаты расчетов. *К. А. Семендяев*

3489. Успехи и перспективы в области электронных вычислительных машин. Финетти (Progressi e prospettive nel campo delle calcolatrici elettroniche. Finetti Bruno de), Tecn. ital., 1953, 8, № 1, 25—33 (итал.; резюме англ.)

В первой части статьи рассматривается в самых общих чертах современное состояние вычислительной техники. Упоминается ряд американских вычислительных машин: дифференциальные анализаторы Муровской электротехнической школы (Пенсильванский университет) и Массачузетского технологического института; цифровые вычислительные машины «Марк-I», СЕАК, УНИВАК, ЭЛЕКОМ-100 и др. Сообщается о ведущихся работах по использованию машины СВАК для целей автоматического перевода с немецкого языка на английский. Сообщается об организации в Италии по решению ЮНЕСКО (UNESCO) Международного вычислительного центра.

Во второй части предлагается проект использования быстродействующих машин для решения задач сравнительно малого объема, для которых программирование экономически невыгодно, а также для случаев, когда оно вообще невозможно и т. п. Для эффективного использования машины в этих случаях одна достаточно быстродействующая машина должна обслуживать большое число абонентов, имеющих

устройства для передачи в машину чисел и инструкций. Связь абонентов с машиной осуществляется по телефонной сети. Простые операции (сложение и т. п.) абонент выполняет на месте, а для выполнения более сложных (извлечение корня, возведение в степень, вычисление функций или нахождение их по таблице с последующим интерполированием и т. д.) обращается к машине. Машина производит вычисления для каждого из абонентов в порядке установленной очередности. Данные, получаемые от абонентов, сохраняются в определенных ячейках медленно действующего запоминающего устройства (например, релейного) до тех пор, пока машина не извлечет их оттуда для выполнения необходимых операций.

В промежутках между вызовами машина может производить другие вычисления по заранее введенной в нее программе, прерывая их по мере поступления вызовов. По весьма грубым оценкам автора, машина, работающая со средней скоростью 1000 арифметических операций в секунду, сможет обслужить около 500—1000 абонентов.

Н. Я. Матюхин

3490. Достижения радиотехники за 1952 г. (Radio progress during 1952), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 4, 452—462, 472—476, 483—487 (англ.)

Подробный обзор литературы за 1952 г. по вопросам радиотехники и смежных областей, в том числе и по вычислительным машинам. Приводится краткое изложение наиболее интересных результатов.

В разделе «Электронные лампы и полупроводники» в числе других разбираются работы, посвященные вопросу повышения надежности радиоламп, особенно предназначенных для работы в вычислительных машинах. Статистический анализ показал, что 2/3 дефектов в лампах, используемых в вычислительных машинах, связаны с падением анодного тока и дефектами катода. Приведено библиографическое описание работ по электроннолучевым запоминающим трубкам. Подробно описаны работы по полупроводниковым приборам, в основном по материалам журнала Proc. Inst. Radio Engrs, 1952, **40**, № 11.

В разделе «Промышленная электроника» приведен перечень работ по магнитным усилителям и нелинейным диэлектрикам.

Монокристаллы титаната бария используются для запоминающих устройств в вычислительных машинах. При частоте обращения к запоминающему устройству 10^6 двоичных разрядов в 1 сек. и мощности затрачиваемой на считывание 20 *мвт*, мощность полезного сигнала составляет 2,8 *мвт*. Ведутся также работы с поликристаллическим титанатом бария.

Разработан диэлектрический усилитель низкой частоты с выходной мощностью 1 *вт* и к. п. д. 25%.

В разделе «Электронные вычислительные машины» перечислены работы в области больших вычислительных машин и даны фото машин УНИВАК (UNIVAC), ОАРАК (OARAC) и «Тайфун» (Typhoon).

Высший исследовательский институт в Принстоне (Institute of Advanced Study) ввел в действие несколько машин с электростатическим запоминающим устройством на обычных трубках. В числе них машина ОРДВАК (ORDVAC), установленная в Баллистической лаборатории в Абердине (Aberdeen). Постройка подобной же машины закончена в Иллинойском университете. Прошла приемные испытания машина РАЙДАК (RAYDAC), построенная фирмой «Райтеон» (Raytheon Manufacturing Co.). РАЙДАК имеет параллельное арифметическое устройство, последовательное запоминающее устройство на ртутных линиях и входное-выходное устройство с магнитной лентой. Введена в действие в Гарвардском университете машина «Марк IV» (Mark IV). «Марк IV» — последовательная десятичная машина с магнитным барабаном, в арифметическом устройстве машины применены регистры на магнитных сердечниках. Сообщается о машинах Национального бюро стандартов (NBS) СЕАК (SEAC) и СВАК (SWAC); первая из них уже два года находится в регулярной эксплуатации, вторая — все еще в процессе регулировки (см. реф. 3486). Машина ЭДВАК (EDVAC) (РЖМат, 1953, 476) находится в регулярной эксплуатации в Исследовательском центре противовоздушной обороны в Абердине. Машина ИРА-1101 (РЖМат, 1954, 1850) показала высокую степень надежности в работе.

Моделирующее устройство «Тайфун» (Typhoon), построенное фирмой RCA, установлено в Военно-морском авиационном исследовательском центре в Джонсвилле, Пенсильвания. Сконструированный для моделирования полета ракет «Тайфун», кроме того, с успехом применяется для исследований характеристик самолетов с автопилотом.

На конференции по малым вычислительным машинам, проходившей в Пентагоне (Вашингтон) в мае 1952 г., демонстрировались следующие образцы малых последовательных машин, имеющих запоминающее устройство на магнитном барабане, потребляющих не более 10 *квт* мощности, стоимостью от 50 до 100 тыс. долларов: ДЖЕНКОМП-BI (JAINCOMP-BI), МОНРОБОТ (MONROBOT), КАДАК (CADAC), ЭЛЕКОМ-100 (ELECOM-100), «Модель 30—201», МИНИАК (MINIAC).

Среди специализированных вычислительных машин наибольшее применение находят цифровые машины для решения дифференциальных уравнений (цифровые дифференциальные анализаторы) и специальные машины типа моделирующих устройств, в которых часто применяется сочетание непрерывных и цифровых устройств.

Приведена обширная библиография по запоминающим устройствам.

В разделе «Теория передачи сообщений и системы модуляции» разобраны работы по вопросам кодирования сообщений, нахождения оптимальных кодов, исследования статистических свойств сигналов и помех и устройств для повышения отношения сигнал / шум.

В Массачузетском технологическом институте построен электронный коррелятор непрерывного действия, позволяющий получать одновременно пять кривых корреляции. *Н. Я. Матюхин*

3491. Конференция по автоматическим цифровым вычислительным машинам (Symposium on automatic digital computation), Instrum. Practice, 1953, **7**, № 8, 631 (англ.)

Перечень докладов, сделанных на конференции, в числе них доклады по английским машинам: АКЕ, первая модель (ACE, Pilot model) (РЖМат, 1954, 2752), ЭДСАК (EDSAC), ЛЕО (LEO), МАДАМ (MADAM), МОЗАИК (MOSAIC), НИКОЛАС (NICHOLAS), Марк II (R. A. E. Mark II), ТРИ (TRE), а также

сообщения о малых машинах: Харвелл (Harwell), АПЕКС (APE(X)C), ЭЛЛИОТ-401 (РЖМат, 1953, 1435), доклады о программировании, доклады о проектировании и обслуживании машин.

Н. Я. Матюхин

3492. Новая цифровая счетная машина. (New digital computer), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 2, 294, 296, 298, 300 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1842.

3493. Счетная машина (Calculator), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 212 (англ.)

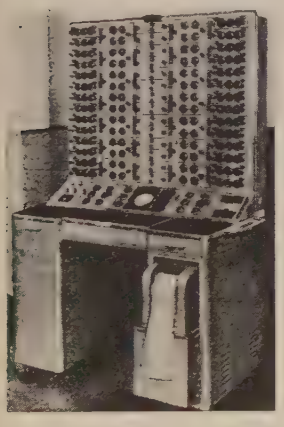
См. РЖМат, 1953, 492.

3494. Новая электронная счетная машина (New electronic calculator), Petrol. Refiner, 1953, **32**, № 6, 162 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2375.

3495. Моделирующее устройство для проектирования самолетов (Analogue computer for aircraft design), Electr. J., 1953, **151**, № 12, 893—894 (англ.)

Описывается электронное моделирующее устройство общего назначения, разработанное исследовательским отделом фирмы «Шорт» (Short Brothers and Harland Ltd.), отличающееся компактностью конструкции и приспособленное для массового производства. Устройство предназначено для решения трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка и состоит в окончательном варианте из 18 штук пятиламповых усилителей и соответствующего количества пассивных *RC*-цепей, обеспечивающих в сочетании с усилителями выполнение ряда линейных математических операций (интегрирование, суммирование, умножение на постоянную величину и т. д.). Предусматривается также 29 штук трехдекадных сопротивлений в качестве масштабных элементов.



К реф. 3495

Устройство может быть использовано в качестве электронного интегратора и модели.

Конструктивно (см. фиг.) оно выполнено в виде двухтумбового стола, на котором устанавливается стенд со сменными решающими усилителями. Источники питания размещены в левой тумбе стола.

При наборе задачи решающие элементы соединяются между собой в соответствии с заполненной картограммой при помощи установки штепсельных вилок в наборную панель, которая размещена в крышке стола.

Кроме фотографии общего вида установки приводятся также фотографии наборной панели и осциллограммы решения задачи для трех характерных случаев: незатухающие колебания, колебания с затуханием и колебания с нарастающей амплитудой.

Б. Я. Коган

3496. Фарнборо, 1953 год.— Механический разум (Farnborough' 53.— Mechanical mind), Air Pictor. and Air Res. Gaz., 1953, **15**, № 10, 295 (англ.)

В отчете об авиационной выставке 1953 г. в Фарнборо (Англия) отмечается, что несколько лет тому назад электронные вычислительные машины были «роскошью, доступной лишь богатым американским компаниям», эти машины «ревниво оберегались и сдавались компаниям в аренду за баснословные деньги». Теперь же компания «Шорт» (Short Brothers) объявила о том, что в производстве находится простое компактное электронное вычислительное устройство, первый экземпляр которого был выпущен менее чем за один год (см. реф. 3495).

3497. Емкостное устройство для определения картины поля при решении двумерных краевых задач уравнения Пуассона. Гилберт, Гилберт (Capacitively coupled field mapper. Gilbert E. O., Gilbert E. G.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 7, 600—605 (англ.)

Для определения изолиний при решении двумерных краевых задач уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F, \qquad (1)$$

где $F = \text{const}$, предлагается использовать устройство, состоящее из листа бумаги с верхним проводящим слоем, наложенного через изоляционную пластинку на плоский электрод. Практически взята бумага типа «Теледельтос», которая применяется в приборах-самописцах. В качестве изолятора использовано стекло.

К границам заданной области на проводящей бумаге приложен один полюс источника тока частотой 1000 *гц*, напряжением 100 *в*. Второй полюс источника приложен к общему плоскому электроду. Емкостные токи, проходящие через слой диэлектрика (стекло) к отдельным элементам верхнего слоя бумаги, создают падение напряжения вдоль этого слоя по отношению к граничным электродам (порядка 1 *в*).

При помощи зонда и измерительного устройства можно определить местоположение линий равных значений (изолиний) этих напряжений по отношению к граничным электродам.

Эти напряжения представляют собой приближенные значения искомой функции u уравнения (1).

Погрешность решения задач определяется неоднородностью бумаги (от 2% до 16% в различных образцах), влиянием влаги, диэлектрическими потерями в изоляционной пластинке (стекле) и погрешностью измерения. При решении задачи для области — круг диаметром 20 *см* максимальная погрешность в положении изолинии была меньше 0,1 *см*.

Решение одной задачи занимает время 3—4 часа.

Приведены эквивалентные схемы устройства вместе с цепями измерительного прибора и фото.

Л. И. Гутенмахер

3498. Быстродействующий счетчик по основанию 3. Вейсман (Compteur à grande vitesse utilisant la notation ternaire. Weissman Richard), Radio Techn. Digest, 1953, **7**, № 2, 83—90 (франц.)

Перевод статьи «High-speed counter uses ternary notation». Weissman R., Electonics, 1952, **25**, № 10, 118—121.

Рассматривается схема счетчика по основанию 3, использующего специальные элементы, имеющие три устойчивых состояния. Приводится схема такого элемента, которая получается из обычной триггерной схемы путем добавления двух диодов.
Н. Б.

3499. Магнитный запоминающий регистр (Magnetic storage register), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 6, 12A (англ.)

Сообщение фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.) о выпуске 24-разрядных параллельных двоичных магнитных запоминающих регистров D1143A и D1143B. Время записи числа в регистр составляет 8 μсек и 0,8 μсек, время выборки 3μсек и 0,5μсек для типов D1143A и D1143B соответственно. Длительность запоминания практически неограниченная. Размеры регистра, состоящего из 24 запоминающих и 24 вентильных схем, 1,9 × 2,6 × 5,4 *см*. Регистр смонтирован на специальном разъеме. Приведена фотография. *Н. Я. Матюхин*

3500. Десятичная счетная лампа (Die dekadische Zählröhre), Umshau, 1953, **53**, № 11, 347 (нем.)

Сообщение о счетной лампе E1T (РЖМат, 1953, 948, 949). *Н. М.*

3501. Рассмотрение допусков при конструировании электронной аппаратуры. Майлс (Tolerance considerations in electronic product design. Miles Raymond C.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, **6**, 75—81 (англ.)

Общие соображения о целесообразности применения методов теории вероятностей для выбора допусков при конструировании электронной аппаратуры. В качестве иллюстрации приведены экспериментальные кривые разброса проводимости для электронной лампы одного типа. *Я. И. Хургин*

3502. Достижения английской техники в области изготовления печатных и герметизированных схем. Даммер (British developments in embedded and printed circuits. Dummer G. W. A.), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 5, 84—92 (англ.)

Описываются: результаты работ по производству аппаратуры способом печатания и по способу получения сопротивлений методом напыления (пульверизации) как составной части процесса «печатания» аппаратуры; разработка автоматического процесса производства элементов счетных машин; принципы разделения герметизированной аппаратуры на отдельные блоки; физические и электрические свойства смол, употребляемых для герметизации аппаратуры; применение техники герметизированных схем для изготовления телеметрической и радиолокационной аппаратуры.

Автор указывает, что в настоящее время в Англии употребляются четыре способа производства печатных схем: 1) печать и обжиг на стеклянных пластинках с использованием шелковых трафаретов (silk-screen stencils) (для цифровых счетных машин); 2) офсетная печать с использованием пасты с коллоидальным серебром (для слуховых аппаратов); 3) прессование и травление фольги (для различных применений); 4) штамповка (сборка обмоток).

Существует еще метод «отдельных линий» (unitline), связанный с горячей штамповкой пластмасс и разработанный с целью использования установок горячей штамповки. При этом методе производится тиснение рисунка схемы горячим штампом на пластмассе, посыпанной серебряной пудрой. Остаток пудры удаляется и может быть употреблен вновь. Полученные этим способом проводящие линии схемы толщиной 0,07 *мм* и шириной 2,3 *мм*, нанесенные на фенолитовой пластине, выдерживают ток до 12 *а* без образования пузырей на пластмассе. При нанесении же рисунка на керамику можно пропускать ток до 70 *а* без растрескивания керамики.

Наиболее важной проблемой, связанной с изготовлением печатных схем, является проблема изготовления сопротивлений. В Англии разрабатываются три метода производства сопротивлений, описываемые ниже.

1. Метод напыления на стеклянные пластины. По этому методу изготовляются блоки для арифметических устройств электронных цифровых счетных машин, требующих большого количества блоков нескольких типов. Рисунок схемы наносится методом вжигания серебряной пасты при 575°. Сопротивление проводов при этом способе не превышает 0,1 *ом*, провода легко пропаиваются. Для пайки употребляется припой, содержащий 2% серебра. Серебро соединяется с изолятором весьма прочно; провода, расположенные на большой грани прямоугольника, служат выводными контактами; при контактном давлении 450 *г* они выдерживают более 35 000 вставлений. На блоке можно разместить до 36 контактов. Блоки защищены перфорированным кожухом и рассчитаны на принудительное воздушное охлаждение. В другом варианте плата укрепляется в штампованном алюминиевом кожухе, заполненном трансформаторным маслом. Эта мера сильно снижает температуру деталей.

Для изготовления сопротивлений разработан машинный способ. Стандартный размер сопротивлений выбран 10×7,5 *мм*. Мощность, рассеиваемая сопротивлениями такого размера, вполне достаточна для элементов счетных машин. Сопротивления получаются методом напыления. Получение сопротивления нужной величины при этом способе осуществляется зигзагообразным удалением части проводящего слоя. Этот способ, при одном и том же нанесенном слое углерода, позволяет получать сопротивления, величины которых относятся как 100 : 1. Мощность рассеяния этих сопротивлений от 0,5 *вт* до 1 *вт* (в зависимости от размеров удаленной части слоя). Подгонка сопротивлений при помощи гравировки проводящего слоя производится автоматически, величина сопротивления контролируется автоматическим мостом. Получаемая при этом точность равна 1%, время обработки 40 сек. Изменения в величине сопротивления, возникающие вследствие нанесения защитного лака, 2%; суммарная величина допуска 5%. Конденсаторы, употребляющиеся в этих блоках, керамические. При употреблении в качестве диэлектрика титаната бария конденсаторы емкостью до 10 000 *пф* имеют размер 10 × 7,5 *мм*, как и сопротивления.

2. Использование геометрических соотношений для угольных сопротивлений. Меняя величину площади нанесенного слоя и, при данной площади, форму его, можно получить сопротивления разной величины, обладающие различной мощностью рассеяния. Нанесение проводящего слоя производится равномерно по всей поверхности изолятора (через

трафарет). Употребляя прямоугольники со сторонами, отношение которых может изменяться до величины 10 : 1, и удельным сопротивлением на квадрат в 1000 *ом* и 100 000 *ом*, можно получить набор сопротивлений в диапазоне от 100 *ом* до 1 *Мом*. Надежный электрический контакт с угольной массой осуществляется при помощи горячего прессования серебра, описанного выше.

3. Металлопленочные сопротивления. Стабильность платино-золотых металлопленочных сопротивлений выше 1%, уровень шумов 0,02 *мв* на 1 *в*. Температурный коэффициент положителен и равен приблизительно 0,025% на 1° для смеси, состоящей из 80% золота и 20% платины. Мощность рассеяния этих сопротивлений очень высока, рабочая температура ограничивается величиной 150° только прочностью спаев. Автор полагает, что можно сохранить большинство преимуществ металлопленочных сопротивлений, не употребляя в то же время хрупкого стекла. Пленка металла наносится гальваническим способом на одной стороне медной фольги и рисунок схемы (сопротивлений) воспроизводится при помощи селективного травления (не действующего на медь). Медная фольга затем приклеивается к пластмассовому листу сопротивлениями внутрь, после чего травится медь таким же образом. Получается схема с высокостабильными сопротивлениями, легкая по весу, пригодная для употребления в самолетном оборудовании. Опыты, проведенные по производству подобных сопротивлений, подают большие надежды. Были проделаны опыты по производству сопротивлений из оксидных пленок, с целью получения сопротивлений, занимающих по точности и стабильности среднее положение между металлопленочными и углеродистыми сопротивлениями. Работа по производству сопротивлений из оксидной пленки находится еще на ранней стадии разработки, хотя уже были получены пятипроцентные сопротивления с малым уровнем шумов, температурный коэффициент которых может регулироваться составом смеси.

Специальное внимание уделяется герметизированным схемам. Основные вопросы, касающиеся конструирования характеристик наиболее часто применяемых заливочных смол, рассмотрены в более ранних статьях (Javitz Alex. E., Electr. Manufact., 1951, Sept., 103; Heitert D. G., Niemann H. W., Electr. Manufact., 1952, May, 113).

Разрабатываемые сейчас радиолокационные установки состоят из отдельных герметизированных блоков передатчиков, синхронизаторов, разверток и блоков питания. Часть деталей этих блоков, такие как трансформаторы, катушки, реле, конденсаторы, изготовляются герметизированными и в таком виде устанавливаются прямо на шасси. Остающиеся детали (сопротивления и конденсаторы) группируются вокруг ламповых панелей и также герметизируются. Ламповые панели изготовляются из влагостойкого политетрафторэтилена.

Приведены фотографии некоторых образцов аппаратуры, изготовленных описанными выше способами, приведены схемы трех поточных линий для автоматического производства печатной аппаратуры; дана библиография (3 названия) по рассматриваемому вопросу. Указывается, что аннотированная библиография по 10 ранее опубликованным статьям дана в журнале Electr. Manufact., 1952, Dec., 260. *Л. В. Кутуков*

3503. Печатная и герметизированная аппаратура. Даммер, Джонстон (Printed and potted electronic circuits. Dummer G. W. A., Johnston D. L.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1953, **100**, ч. 3, № 66, 177—191 (англ.)

Статья представляет собой доклад, сделанный на заседании радиосекции Института инженеров-электриков (IEE) (Англия). Доклад почти полностью опубликован в статье Даммера (см. реф. 3502).

Приведены физические и электрические характеристики смол, употребляющихся для заливки герметизированной аппаратуры. Описывается применение техники герметизированных схем в современной телеметрической и радиолокационной аппаратуре. Приведены данные печатных и герметизированных катушек, рассчитанных на работу в диапазоне от 45 до 110 *Мгц*.

Указываются два способа автоматической пайки:

1. Пайка непосредственным погружением, при котором плата с размещенными на ней деталями погружается в ванну с припоем, покрытым слоем пальмового масла для предохранения от окисления. Припой может быть также защищен пропускаемой над ним струей азота. При употреблении в качестве припоя эвтектического сплава, содержащего 62% олова и 38% свинца, и температуре припоя 240° время погружения платы в припой 5 сек.

2. Пайка погружением с защитой части монтажа и деталей специальными масками. Этот способ уменьшает расход припоя и предохраняет от спайки близко расположенные провода. Маски могут изготовляться из тонкой слюды, микалекса, нержавеющей стали, хромированной бронзы и других материалов.

Приведена схема и в общих чертах описана экспериментальная установка для автоматического изготовления электронной аппаратуры.

Приведена библиография (38 названий) по производству печатных и герметизированных схем. Дана стенограмма обсуждения доклада.

Л. В. Кутуков

3504. Техника изготовления печатных схем (Printed circuit techniques), Irish Engng J., 1953, **4**, № 9, 213—218 (англ.)

Описываются преимущества печатных схем; указывается, что способы печатания позволяют упростить, механизировать и удешевить сборку электронной аппаратуры. Отмечается, что сейчас уже сотни тысяч приемников изготовляются при помощи укрепления готовых деталей на плате, с нанесенной на ней печатной монтажной схемой. Дается следующая классификация способов печатания:

1. Окраска (painting). Этим способом можно изготовлять и сопротивления и проводники. Краски обычно состоят из пигмента, растворителя, цементирующего вещества, восстановителя, наполнителя и защитного покрытия.

Пигмент образует проводящий слой. Для проводников в качестве пигмента употребляется порошок серебра, окись серебра, нитрат серебра или органические соединения серебра. Могут употребляться также соли меди и благородных металлов. В качестве цементирующих веществ употребляются легко растворимые смолы: фенольные, растворимые в ацетоне, и силиконы, растворимые в хлорзамещенных углеводородах. Растворитель служит для растворения цементирующего вещества и для создания соответствующей густоты смеси цемент — пигмент.

В качестве растворителей употребляется спирт, ацетон, этилацетат, бутилацетат, амилацетат, скипидар и др. Наполнитель служит для разделения проводящих частиц с целью увеличения электрического сопротивления. В качестве наполнителей употребляются порошок слюды, минералит (mineralite), дифенил и хлорзамещенные дифенилы. Способом окраски можно изготовить катушки для двухметрового диапазона с $Q = 125$. Пайка схем, полученных при помощи серебряной краски, производится припоем, содержащим 2% серебра (для устранения поглощения серебра из проводников).

2. Пульверизация (spraying). Можно распылять краски и расплавленные металлы. Для пульверизации употребляется обычная аппаратура. Расплавленные металлы можно наносить на дерево, бакелит, пластмассы и некоторые сорта керамики. Наиболее прочно пристает серебро.

3. Химическое осаждение — отложение металлов на изолятор способом выделения солей из растворов. Сюда относятся процессы, аналогичные процессу серебрения зеркал и стеклянных сосудов.

4. Катодное распыление.

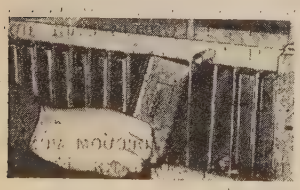
5. Горячая штамповка.

Л. В. Кутуков

3505. Новая технология изготовления радиоаппаратуры. Ч. I. Даммер, Джонстон (New constructional techniques (Part 1). Dummer G. W., Johnston D. L.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 308, 417—421 (англ.)

Рассматриваются различные конструкции радиоаппаратуры за период с 20-х годов этого столетия до настоящего времени.

После второй мировой войны стали применяться конструкции, состоящие из большого числа отдельных блоков. Такая конструкция значительно удешевляет производство, упрощает обслуживание аппаратуры. Счетная машина, содержащая 1000 ламп, может быть собрана из 250 четырехламповых стандартных блоков трех типов, механически идентичных. Развитие технологии происходит также в следующих направлениях: изготовление аппаратуры способом печати, автоматическая сборка, герметизация, заливка искусственными смолами.



К реф. 3505

При миниатюризации деталей сильно затрудняется проблема охлаждения, так как выделяемая тепловая энергия, отнесенная к единице рассеивающей поверхности, увеличивается. Применение принудительной циркуляции воздуха увеличивает запыление в промышленных установках и усиливает действие влаги на аппаратуру, работающую в условиях тропиков. Если для охлаждения употребляется масло, то потребный его объем составляет 1/1500 от объема воздуха. Промежуточное место между этими способами занимает способ разделения сверхминиатюрных ламп алюминиевыми перегородками, между которыми продувается воздух, охлаждаемый водяными радиаторами. При другом способе лампы помещаются в отверстия, просверленные в металлических блоках, причем блоки находятся в непосредственном контакте с системой труб, по которым пропускается охлаждающая жидкость; отверстия для лампы замазываются силиконовой замазкой. При этом способе отвод тепла увеличивается в 3—5 раз.

Наиболее эффективный способ охлаждения аппаратуры, работающей в условиях тропиков,— заливка маслом. Особенно эффективен этот способ при заливке маслом и последующ герметизациией небольших блоков. На фото изображен образец установки, охлаждаемой вышеупомянутым способом. Блоки наполнены маслом, по стенкам стойки пропускается вода. Тонкие стенки полых перегородок стойки плотно прилегают к стенкам блоков, создавая тем самым при подаче воды благоприятные условия для отвода тепла.

Отдача тепла пропорциональна разности температур, поэтому ведется разработка деталей и изоляционных материалов, способных работать при температурах до 200°.

Были построены усилители, способные работать при температурах до 14° К. При изменении температуры от 14 до 290°К усиление их менялось в 3 раза, главным образом за счет температурного коэффициента сопротивлений и конденсаторов.

Перспективным является, повидимому, охлаждение кипящими жидкостями, так как при этом точно фиксируется температура.

Приведена обширная библиография (61 название).

Л. В. Кутуков

3506. Печатные схемы (Printed circuits), Electr. Times, 1953, **123**, № 3191, 14—16 (англ.)

Краткое описание процесса изготовления печатных схем. Приведены соображения о преимуществах печатных схем и области их применения. Приводится несколько фотографий образцов печатных элементов.

См. также РЖМат, 1953, 1471, 1472.

3507. Униполярный полупроводниковый триод с использованием «эффекта поля». Дейси, Росс (Unipolar «field-effect» transistor. Dacey G. C., Ross I. M.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 8, 970—979 (англ.)

Шокли был предложен новый образец кристаллического триода, работа которого основана на модуляции проводимости канала поперечным электрическим полем (Shockley W., Proc. Inst. Radio Engrs, 1952, **40**, № 11, 1365—1376). Авторами проведено некоторое уточнение теории Шокли с целью учета особенностей конструкции реальных образцов триодов, а также роли некоторых побочных эффектов— «вытягивания» носителей зарядов в образцах, влияния тока неосновных носителей и температуры. Наиболее существенным является учет тока неосновных носителей, который, как показано, при соответствующих условиях может обусловить отрицательное сопротивление на входных зажимах прибора.

На основании разработанной теории авторами составлены и приведены в работе номограммы, позволяющие рассчитать все основные характеристики прибора.

Описаны конструкции и приведены результаты исследований экспериментальных образцов приборов, изготовленных с целью проверки разработан-

ной теории. Экспериментальные образцы имели высокие входные и выходные сопротивления при достаточно большой сквозной проводимости, доходившей до 0,3 *ма/в*. Все характеристики были весьма стабильны во времени и не менялись после значительных нагревов. В отличие от обычных кристаллических триодов с контактом большой площади эти приборы имеют весьма высокий частотный предел; у экспериментальных образцов независимость выхода от частоты была получена до частот свыше 3 *мгц*. Удовлетворительное согласование экспериментальных характеристик с расчетными дает авторам основание утверждать, что при использовании несколько более низкоомного германия (что, однако, внесет некоторые технологические трудности) могут быть созданы приборы со сквозной проводимостью 24 *ма/в* и частотным пределом 140 *мгц*. Предсказанная возможность создания отрицательного входного сопротивления была реализована в одном из образцов, который генерировал при включении в цепь резонансного контура на частотах до 100 *кгц*.

Приборы имеют относительно высокий уровень шумов (например, при коэффициенте усиления по мощности в 19,6 *дб* и частоте 1000 *гц*, равный 68 *дб*), однако дальнейшее усовершенствование приборов может привести к некоторому уменьшению этой величины.

Вследствие высокого уровня шумов, а также и того, что высокая сквозная проводимость и частотный предел могут быть достигнуты при повышенных мощностях рассеивания, приборы, повидимому, целесообразно будет использовать для применений, требующих повышенных мощностей.

А. В. Ржанов

3508. Терминология и уравнения для линейных активных четырехполюсников, содержащих полупроводниковые триоды. Джаколетто (Terminology and equations for linear active four-terminal networks including transistors. Giacoletto L. J.), RCA Rev., 1953, **14**, № 1, 28—46 (англ.)

Приведена сводка основных уравнений активного четырехполюсника, выражений для его основных параметров (коэффициенты усиления по току, напряжению, мощности, входные и выходные сопротивления) для различных случаев нагрузки и формулы для вычисления параметров эквивалентных схем с одним и двумя генераторами.

Дана сводная таблица всех перечисленных формул для транзисторных схем с заземленным эмиттером, коллектором или основным электродом и практические примеры расчета по этим формулам.

Н. Я. Матюхин

3509. Прибор для испытания полупроводниковых триодов. Кершоу, Ломан, Херзог (Cathode-ray tube plots-transistor curves. Kurshaw J., Lohman R. D., Herzog G. B.), Electronics, 1953, **26**, № 2, 122—127 (англ.)

Описывается универсальный прибор для испытания полупроводниковых триодов как с точечным, так и с поверхностным контактом, который дает возможность автоматически получать семейства характеристик триодов для различных вариантов соединения их электродов. Основными частями прибора являются: осциллограф, схема развертки, источник питания постоянным током и источник смещения триода.

Испытываемый триод вставляется в специальное гнездо; характеристики в вольт-амперной системе координат получаются на экране последовательно одна за другой вслед за изменением параметра. Благодаря тому, что электроннолучевая трубка осциллографа обладает длительным послесвечением, на экране можно видеть одновременно все характеристики триода при данном соединении его электродов.

В качестве переменного параметра для получения семейства характеристик берется смещение триода, которое изменяется на определенную величину при помощи отдельного устройства после получения на экране каждой характеристики. Всего в приборе предусмотрено 10 ступеней изменений смещения. Предусмотрена также ручная регулировка смещения. Получающиеся на экране осциллографа характеристики триода фотографируются. Точность прибора зависит в основном от точности подаваемого напряжения смещения.

Приводится ряд фотографий, в частности, внешний вид самого прибора, примеры различных семейств характеристик и схемы отдельных элементов прибора.

В. Н. Аверин

3510. Физика полупроводникового триода в упрощенном изложении. Джентайл, Баротта (Transistor physics simplified. Gentile S. P., Barotta P. J.), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 2, 46—47 (англ.)

В точечно-контактном триоде эмиттер и коллектор представляют собой контакты, образованные металлическими остриями с поверхностью кристалла, и имеют малые площади и относительно большие сопротивления. Контакт базы, однако, имеет большую площадь и малое сопротивление. Такие триоды делаются из кристаллов германия как *n*-типа, так и *p*-типа. Однако экспериментально было показано, что в готовом триоде, сделанном, например, из кристалла *n*-типа, имеются слои *p*-типа, и наоборот. Таким образом, точечно-контактный триод *n*-типа представляет собой следующую структуру: между кристаллом *n*-типа и острием эмиттора имеется тонкий слой *p*-типа, а между острием коллектора и основным объемом кристалла *n*-типа находятся целых два последовательно помещенных слоя — первый *n*-типа, а второй *p*-типа. Такое сложное строение коллектора дает возможность получать у точечно-контактных триодов большие значения коэффициента усиления по току (α), тогда как у обычных триодов плоскостного типа всегда $\alpha < 1$. Природа этого явления сводится к тому, что одна дырка, приходящая от эмиттора к коллектору и попадающая в промежуточный слой *p*-типа, дает возможность нескольким электронам перейти из слоя *n*-типа на поверхности в основной объем кристалла *n*-типа, т. е. из коллектора в базу.

Так как ток эмиттора состоит в основном из дырок, переходящих из поверхностного слоя *p*-типа в объем кристалла, то описанный выше механизм соответствует значению $\alpha = -\frac{\partial I_к}{\partial I_э} > 1$. У триода *n*-типа смещение на эмиттере положительно, а на коллекторе отрицательно, у триода *p*-типа полярность потенциалов смещений обратна, но в обоих случаях она соответствует прямому току для эмиттора и

обратному току для коллектора. Свойства кристаллического триода существенно отличны от вакуумного прежде всего тем, что первый имеет малое входное и высокое выходное сопротивления; кроме того, он свободен от многих ограничений вакуумных триодов: хрупкости, больших размеров и малой длительности работы. Кристаллические триоды с успехом применяются в звуковых усилителях, радио- и телевизионных приемниках, слуховых аппаратах, счетных устройствах и многих других схемах. Свойственные им недостатки — высокий уровень шумов и чувствительность к температуре и влажности, повидимому, могут быть преодолены в ходе их усовершенствования.

Указывается, что до конца 1953 г. ожидается выпуск 250 000 штук кристаллических триодов в месяц. *А. В. Ржанов*

3511. Новое применение сурьмы в кристаллических триодах (Transistors.— New use for antimony?), Engng and Mining J., 1953, **154**, № 6, 99 (англ.)

Интерметаллические соединения алюминия, галлия и индия с мышьяком и сурьмой могут быть использованы вместо германия и кремния для изготовления диодов и триодов (РЖМат, 1954, 1893, 1894). Эти соединения имеют, подобно кремнию и германию, структуру типа алмаза и в зависимости от примесей могут быть *p*- или *n*-типа. При комнатной температуре удельное сопротивление соединения алюминия с сурьмой может меняться более чем в 500 тысяч раз в зависимости от контролируемых изменений материала. Изменения удельного сопротивления с температурой для образцов алюминий-сурьма различных удельных сопротивлений в интервале от 0,01 *ом·см* до 500 *ом·см* напоминают таковые для кремния с различными концентрациями бора. Однако ширина запретной зоны для алюминия-сурьмы несколько больше, чем для кремния, так что этот материал имеет преимущество перед германием и, возможно, кремнием для производства приборов, рассчитанных на высокие рабочие температуры, в частности приборов, представляющих интерес для военных целей. Добавочным преимуществом этого материала является его низкая стоимость, почти в 1000 раз меньшая, чем стоимость германия. Из алюминия-сурьмы были сделаны точечно-контактные диоды как *n*-, так и *p*-типа, коэффициенты выпрямления которых достигали 10 000. Было показано также, что алюминий-сурьма может применяться для преобразования света в электрическую энергию. *А. В. Ржанов*

3512. Получение германия из жидких отходов (Production of germanium from liquid waste), Erda, 1953, **25**, № 6, 37 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2433.

3513. При помощи полупроводниковых триодов достигнуто усиление в 300 000 раз при малом потреблении мощности на питание (Amplifications of 300 000 times attained with low power consumption using junction transistors), Chem. and Engng News, 1953, **31**, № 17, 1742—1743 (англ.)

Краткое сообщение о докладах в Электрохимическом обществе. В докладе Шокли (W. Shockley) указано, что при помощи полупроводниковых триодов получено усиление от 100 до 300 тысяч при потреблении мощности на питание порядка миллионной доли ватта; кратко охарактеризован механизм проводимости и влияние несовершенства кристалла. Далее сообщается о докладах: 1) Моррисона (George H. Morrison) об обнаружении примесей в германии при помощи метода меченых атомов (РЖМат, 1954, 1891, 1892); 2) Медкафа, Рила и Смита (E. Medcalf, R. K. Riel, C. E. Smith) о новом методе получения металлического германия посредством осаждения из газовой фазы при восстановлении хлоридов германия; 3) Мидлтона (A. E. Middleton) о замене германия в полупроводниковых триодах сплавами алюминия, галлия и индия с мышьяком и сурьмой (РЖМат, 1954, 1893—1895). Указывается, что сплав алюминия с сурьмой имеет коэффициент выпрямления около 10 000 и работает как вентиль под действием света. *В. С. Бородин*

3514. Элементы технической электроники. Полупроводники. Болан (Eléments d'électronique industrielle. Les semi-conducteurs. Bolant Roger), Mach.-outil franç., 1953, **18**, № 78, 61, 63, 65, 67 (франц.)

Краткая статья общего характера.

3515. Работа полупроводниковых триодов из германия и кремния. Ч. IV. Кобленз, Оуэнс (Transistor action in germanium and silicon. Coblenz Abraham, Owens Harry L.), Electronics, 1953, **26**, № 6, 166—171 (англ.)

В общедоступной форме излагаются общие представления об электронной структуре полупроводников. Основное внимание уделено свойствам германия и кремния. *А. В. Ржанов*

3516. Прогресс современной электроники, достигнутый благодаря применению германия (Gran avance de la electrónica moderna, merced al germanio), Iberica, 1953, **17**, № 259, 453 (исп.)

Краткая статья, рассматривающая преимущества полупроводниковых усилителей по сравнению с ламповыми усилителями. Усилители из германия — металла, существование которого, как отмечает автор, было предсказано Менделеевым, малы по размерам, потребляют незначительное количество энергии, начинают действовать немедленно после включения и обладают большим сроком службы. *Н. Б.*

3517. Юбилей фирмы Rugty Society. Германиевые кристаллы (Rugty Society jubilee. Germanium crystals), Electr. Times, 1953, **124**, № 3230, 624 (англ.)

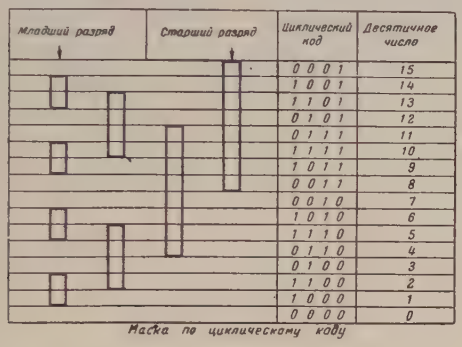
Краткое сообщение о деятельности английской фирмы Rugty Engineering Society, напечатанное в связи с ее пятидесятилетием. Отмечается, что в области германиевых приборов наибольший интерес представляет разработка мощных выпрямителей, которые будут работать при токах порядка 60—70 *а* с к. п. д. 99%, однако эта работа находится в настоящее время только в стадии лабораторных исследований. *Н. Б.*

3518. Преобразователь непрерывных величин в дискретные для вычислительной машины последовательного действия. Грей, Левонян, Рубинов (An analog-to-digital converter for serial computing machines. Gray H. J., Jr, Levonian P. V., Rubinoff M.), Proc.

Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1462—1465 (англ.)

Описывается преобразователь непрерывно изменяющегося напряжения в число. Полученный двоичный код числа вводится в вычислительную цифровую машину последовательного действия. Напряжение, подлежащее преобразованию, подается на вертикально отклоняющие пластины катодной трубки. К горизонтально отклоняющим пластинам приложено напряжение развертки, изменяющееся по линейному закону.

На экран катодной трубки накладывается непрозрачная маска, имеющая ряд прямоугольных вырезов различной высоты (см. фиг.). При отклонении электронного луча слева направо на фотоэлемент, расположенный против экрана, попадают световые импульсы. Эти импульсы представляют собою так называемый «циклический» код числа, соответствующий входному напряжению на вертикально отклоняющих пластинах. На фигуре показаны числа, соответствующие 16 вертикальным уровням напряжения в двоичной системе. Циклический код числа может быть получен из двоичного кода числа путем сложения без переноса двух одинаковых двоичных кодов, из которых один сдвинут вправо на один разряд. Например, циклический код числа 13 может быть получен так:



К реф. 3518

Циклический код в третьем столбце записан слева направо

1101 — двоичный код числа 13
+110(1) — двоичный код числа 13 сдвинут вправо на один разряд

1011 — циклический код (сумма без переноса единицы в высший разряд)

Циклический код при помощи специальной схемы преобразовывается в обычный двоичный код числа. Так как код импульсов, получаемых от фотоэлемента (после формирования импульсов), соответствует зеркальному отображению циклического кода, то необходимо при преобразовании его в двоичный код осуществить это таким образом, чтобы в машину поступали сначала младшие, а затем старшие разряды. Приведены три варианта схем преобразования циклического кода в двоичный.

Экспериментальные результаты были получены для катодной трубки с экраном диаметром 12,7 *см*, на который накладывалась маска, которая имела 8 рядов прямоугольных вырезов, соответствующих 8 разрядам двоичного числа (от 0 до 256 линий по вертикали). Интервалы между горизонтальными линиями составляли около 0,5 *мм*, а интервалы между разрядами (вертикальными линиями деления) — около 12,5 *мм*. Преобразование напряжения осуществлялось правильно при изменениях его, соответствующих частоте 1 *Мгц*. *Ф. В. Майоров*

3519. Цифровой автоматический самописец давлений. Косс (A digital automatic multiple pressure recorder. Coss B. A.), Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Techn. Note № 2880 (англ.)

Приводится описание машины, которая будет автоматически в течение $2^1/_2$ минут измерять и записывать 100 давлений в пределах от 127 до 1650 *мм* рт. ст. с точностью до 2,5 *мм*. Применяемый метод состоит в сравнении неизвестных давлений с эталонным давлением, значение которого в цифровом выражении в любой момент времени известно.

Из J. Roy. Aeronaut. Soc., 1953, **57**, № 509, 350.

3520. Аппарат для считывания с перфорированной ленты (Tape-reading instrument), Overseas Engr, 1953, **27**, № 309, 78 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2757, 2758

3521. Устройство записи непрерывных данных (Analog recorder), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 6, 478 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 947.

3522. Устройство для печатания непрерывных данных (Analog data recorder), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 202 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 947.

3523. Функциональный арифмометр для геодезических вычислений. Рамзайер (A function calculator as applied to geodesy. Ramsayer K.), Bull. géod., 1953, № 29, 275—292 (англ.; резюме нем., франц., исп., итал.)

Арифмометр Однера снабжается специальной приставкой, заменяющей таблицу значений некоторой функции. Такой «функциональный арифмометр» позволяет надежнее и быстрее выполнять вычисления со значениями этой функции, чем обычный арифмометр в соединении с обычной печатной таблицей. Описано устройство и употребление опытного экземпляра функционального арифмометра, построенного и испытанного в работе в Геодезическом институте Высшей технической школы в Штутгарте для функций синус и косинус и некоторых других. Его применение вдвое снизило число случайных ошибок и вдвое же повысило скорость работы, причем результаты получались с 5—6 десятичными знаками, что достаточно для всех вычислений низшей геодезии до триангуляции третьего класса включительно. *В. М. Брадис*

3524. Автоматические вычислительные машины (Automatische Rechenmaschinen), Elektro-Anzeiger, 1953, № 41, 388—389 (нем.)

Сообщение о двух моделях автоматического арифмометра фирмы «Хаман» (Hamann); одна из них (Automat S) с электромотором (100—240 *в*, 40—60 *гц*), имеющая емкость 9 × 8 × 16 цифр, размеры 34 × 26 × 15 см, другая (Model R) с ручным приводом и емкостью 9 × 8 × 13 цифр,

размеры 26 × 16 × 15 *см*. Установка производится рычажками, снабженными удобными головками. Умножение и деление полностью автоматизированы вплоть до возвращения установочного механизма в исходное положение. Полученные произведения и частные готовы для последующих умножений и делений без новой установки (как на счетной линейке, но с 8-значной точностью). Приведены фотографии обеих машин. *В. М. Брадис*

3525. Вычислительная машина Хамана «Автомат S» (Hamann «Automat S»), Art and Industry (London), 1953, 55, № 327, 92—93 (англ.)

Новая вычислительная машина Хамана «Автомат S» является полным автоматом, предназначенным для выполнения четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Для получения произведения в машине применена схема сокращенного умножения, которая, как следует из сообщения, сокращает на 40% время вычислительного процесса. Итоговый счетчик имеет 16 разрядов. Машина приводится в движение электродвигателем, который может работать на постоянном и переменном токе с напряжением от 100 *в* до 240 *в*. Возможно управление машиной одной рукой. *С. И. Пантелеев*

3526. Из раннего периода счетных машин. Виллерс (Aus der Frühzeit der Rechenmaschinen. Willers Friedrich Adolf), Technik, 1953, 8, № 6, 411—415 (нем.)

Очерк-хронология раннего периода (до 1820 г.) развития счетных (цифровых) машин от счетных палочек Джона Непера и суммирующей машины Блеза Паскаля до арифмометров Лейбница, Гана, Миллера. Приводится ряд иллюстраций. Многие из приведенных фактов указаны в книгах автора: «Математические инструменты» (изд. 2, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949) и «Математические машины и инструменты» (Mathematische Maschinen und Instrumente, Akademie-Verlag, Berlin, 1950).
Л. Е. Садовский

3527. Простой счетный прибор для операций с комплексными числами. Робинсон (A simple computer for the manipulation of complex numbers. Robinson R. B.), J. Instn Engrs Australia, 1953, 25, № 6, 102—104 (англ.)

В работе инженера-электрика, в частности при расчетах электросетей, приходится выполнять много действий над комплексными числами, причем обыкновенная счетная линейка помогает мало. В основу нового прибора, призванного облегчить эти расчеты, положена идея счетной логарифмической линейки с двумя движками и специальными шкалами. Первый движок имеет шкалу A с уравнением $\overline{\theta} = m \lg \sec \theta$ и начальной точкой $\theta = 0°$, второй — шкалу B с уравнением $\overline{\theta} = m \lg \operatorname{cosec} \theta$ и начальной точкой $\theta = 90°$, а корпус линейки — обыкновенную логарифмическую шкалу C с уравнением $\overline{c} = m \lg c$ и начальной точкой $c = 1$. Здесь m — общий модуль всех трех шкал, $\overline{\theta}$ — длина отрезка шкал A и B от начальной точки до точки с меткой θ, $\overline{c}$ — длина отрезка шкалы C от начальной точки до точки с меткой c.

Если начальные точки шкал первого и второго движка поставить соответственно против меток a и b шкалы C, а затем найти на шкалах A и B противостоящие точки с одной и той же меткой θ, то индекс ползунка, установленного на эту метку θ, фиксирует на шкале C метку r, связанную с метками a, b, θ соотношениями $m \lg r = m \lg a + m \lg \sec \theta = m \lg b + m \lg \operatorname{cosec} \theta$, и удовлетворяет, следовательно, уравнениям $r = a \sec \theta$, $r = b \operatorname{cosec} \theta$ или, что то же, уравнениям $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$. Метки шкал A и B растут в противоположных направлениях, а потому разыскание одинаковых противостоящих меток этих шкал оказывается довольно трудным. Этот недостаток прибора устраняется остроумным преобразованием движков: на них наносятся декартовы графики функций $\lg \sec \theta$ и $\lg \operatorname{cosec} \theta$, и разыскание одинаковых противостоящих меток шкал A и B сводится к отсчету абсциссы точки пересечения этих графиков, что возможно, если один из движков сделать из прозрачного материала и поместить его не рядом с другим движком, а над ним. Прибор оформляется окончательно через замену прямолинейных шкал круговыми и декартовых графиков графиками в полярных координатах. Прибор становится похожим на счетную линейку с круговыми шкалами — «счетные часы». Он состоит из пяти частично прозрачных дисков диаметром около 20 *см*, вращающихся независимо друг от друга около общего центра, и механизирует переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической его форме и обратно, а также выполнение действий умножения и деления, причем результаты получаются сразу в обеих формах. Круговая форма шкал устраняет затруднения, связанные с выходом индекса за пределы шкал. Изготовление опытного экземпляра потребовало недельной работы одного человека. Точность отсчетов оказалась удовлетворительной для требований инженерной практики. Помимо прямого своего назначения для операций с комплексными числами, прибор механизирует решение прямоугольных треугольников.
В. М. Брадис

3528. Новая линейка для расчетов пружин (Neuen Federrechenschieber), Techn. Rundschau, 1953, 45, № 17, 11 (нем.)

Сообщение о выпуске специальной линейки с двумя движками для расчета пружин, основанной на использовании формул:

$$P = \frac{\pi d^3 Kd}{8\,Dm}\,;\quad F = \frac{n\pi Dm^2 Kd}{dG}\,.$$

Здесь P — упругость пружины в *кГ*; F — удлинение в *мм*; Dm — средний диаметр пружины в *мм*; d — диаметр проволоки в *мм*; n — число активных витков; Kd — допустимая нагрузка в *кГ/мм²*; G — модуль среза в *кГ/мм²*. *Л. Е. Садовский*

3529. Дисковое вычислительное устройство (Disc calculator), Tele-Tech, 1953, 12, № 8, 120 (англ.)

Сообщение фирмы «Сервотрол» (Servotrol Co.) о выпуске вычислительного прибора для расчета нелинейных потенциометров, представляющих заданные функции в моделирующем устройстве той же фирмы. Рассчитываются величины шунтирующих сопротивлений, подключаемых к отводам линейного потенциометра. *Н. Я. Матюхин*

3530. Счетная линейка Буса для определения постоянной Амбара (Calculateur Boos pour la

détermination de la constante d'Ambard), Ann. pharmac. franç., 1953, **11**, № 7—8, 14 (франц.)

Объявление фирмы Les laboratoires Bruneau et C-ie о специальной счетной линейке с двумя движками для вычисления используемой в медицине так называемой постоянной Амбара.

Приведена фотография.

3531. Новая счетная линейка для нефтяной промышленности. Шмелинг (Ein neuartiger Rechenschieber für die Mineralölindustrie. Schmeling F.); Erdöl und Kohle, 1953, **6**, № 10, 632, 637 (нем.)

Прибор предназначен для выполнения различных пересчетов, встречающихся в нефтяной промышленности и торговле в связи с существованием двух систем измерений — метрической и англо-американской. Упрощаются как самые простые переходы от одних мер к другим, например от футов и дюймов к сантиметрам, от фунтов к килограммам, от баррелей к куб. метрам, от галлонов к литрам, от градусов Фаренгейта к градусам Цельсия и др., так и более сложные вычисления, связанные с различием принятых в разных странах нормативов, например при определении вязкости. Прибор представляет собой счетную линейку, снабженную специальными шкалами и метками. Изготовляется фирмой А. Нестлер в Бадене. *В. М. Брадис*

3532. Электронный «мозг». Морган (An electronic «brain». Morgan E. Harris), Newnes Pract. Mech., 1953, **20**, № 234, 362—364; № 235, 418—420 (англ.)

Описание самодельной машины для игры в «крестики-нолики». *Н. Я. Матюхин*

3533. От ручных счетов к электронным машинам. Ганоусек, Бейкер (From beads to electrons. Hanousek Richard, Baker William), Manhattan Engr, 1953, **10**, № 3, 84—87, 95, 98—101, 114 (англ.)

Популярный исторический обзор развития вычислительных устройств. Рассмотрены простейшие триггерные схемы и методы выполнения арифметических действий. *Н. Я. Матюхин*

3534 К. Методы математического исследования электрических машин. Грузов Л. Н., 264 стр., Госэнергоиздат, М.-Л., 1953, 10 р. 25 к.

3535 РЕЦ. Прибор для подсчета эффективности мокрого обогащения углей. Белюгу, Суле, Аит-Уяхья (Machine à calculer les possibilités de lavage. Belugou P., Soulé J.-L., Ait Ouyahia M., 17 pp., 1 tabl., 13 figs, Note technique des Charbonnages de France 3/53, 1953) [**Рецензия**: (R. C.), Rev. ind. minérale, 1953, **34**, № 596, 5—6 (франц.)]

Дано краткое описание задачи и прибора типа планиметра, специально сконструированного для ее решения.

3536 Д. Исследование измерительных счетно-решающих устройств для автоматического определения угловых расхождений между связанно-вращающимися валами. Харизоменов О. В. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. высшее техн. училище им. Баумана, М., 1953

3537 Д. Механический интегродифференциограф усовершенствованной системы и его применение в инженерных расчетах. Герлах Л. Р. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1953

3538 П. Схемы контроля и маркировки для импульсных суммирующих счетчиков. Беллами (Control and marking circuits for adding-type impulse counters. Bellamy John I.) [Kellogg Switchboard and Supply Co.]. Пат. США 2634403, кл. 340—168, 7.04.53

В импульсно-счетном устройстве содержится ряд переключающих контактов, устройство для последовательного приведения этих контактов в действие соответственно импульсам принятой последовательности; нормально разомкнутый общий проводник сигнала, ряд отдельных сигнальных проводников, каждый из которых соответствует импульсу принятой последовательности.

Общий проводник сигнала через переключающий контакт нормально соединен с первым сигнальным проводником. Для приема второго импульса последовательности происходит переключение общего проводника сигнала с первого сигнального проводника на второй; для получения любого следующего импульса последовательности происходит переключение общего проводника с предварительно замкнутого отдельного сигнального проводника на следующий сигнальный проводник и т. д.

Устройство, управляющее замыканием контакта первого сигнального проводника с общим проводником сигнала, срабатывает после окончания принятой последовательности импульсов.

В. С. Бородин

3539 П. Многоэлектродное газоразрядное устройство и цепи. Таунсенд (Multicathode gaseous discharge device and circuits. Townsend Mark A.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2635810, кл. 235—92, 21.04.53

Счетное устройство на три десятичных ступени. Каждая ступень состоит из одной газоразрядной лампы и соответствующих электрических цепей. Лампа содержит два анода (главный и вспомогательный) и две группы катодов (десять индикаторных и десять управляемых). Электроды лампы помещены в баллон с инертным газом и выполнены так, что газовый разряд переходит с одного катода на другой в круговом порядке. Главный анод находится во взаимодействии со всеми катодами. Вспомогательный анод экранирован от всех катодов, за исключением десятого индикаторного и первого и десятого управляемых.

В анодные цепи всех ламп, а также в цепи каждого из индикаторных катодов включены сопротивления.

Сопротивления в цепях десятого индикаторного катода лампы единиц и лампы десятков блокированы конденсаторами.

Цепь вспомогательного анода лампы сотен не используется. Управляемые катоды лампы единиц объединены и приключены к схеме управления непосредственно, в объединенные же цепи управляемых катодов как лампы десятков, так и лампы сотен включены соответствующие сопротивления. Схема управления обеспечивает:

1. Возбуждение газового разряда между главным анодом и одним из управляемых катодов.

2. Подачу входных импульсов на управляемые катоды лампы единиц для переброса газового разряда в круговом порядке.

3. Подачу потенциала на вспомогательный анод для возбуждения разряда в вспомогательном разряднике в момент, когда главный разряд переходит на десятый индикаторный катод.

4. Гашение газового разряда в вспомогательном разряднике при переходе главного и вспомогательного разрядов с десятого индикаторного катода на первый управляемый.

Лампы счетчика включены последовательно при помощи емкостной связи. Выходным электродом является вспомогательный анод, входным — управляемые катоды. Импульс с вспомогательного анода предыдущей лампы, образующийся в момент прихода главного разряда на десятый индикаторный катод, возбуждает вспомогательный разряд в лампе следующей ступени. Величины емкости и сопротивления в цепи вспомогательного анода подобраны так, что вспомогательный разряд поддерживается до тех пор, пока этот разряд переходит от десятого индикаторного катода на первый управляемый.

Приведена принципиальная схема счетчика на три десятичных разряда. *В. А. Зимин*

3540 П. Магнитный точечный самописец для статистических данных. Флеминг (Magnetic spot recorder for statistical data. Fleming Howard M., Jr) [Monroe Calculating Machine Co., Orange, Нью-Джерси, США]. Пат. США 2633402, кл. 346—33, 31.03.53

Ламповый усилитель для записи на магнитном материале чисел, представленных двоичным кодом. Электрические сигналы положительной полярности, соответствующие коду «0» и коду «1», подаются на раздельные входы усилителя. Запись кодов числа осуществляется в виде импульсов положительной или отрицательной полярности в зависимости от того, на какой вход усилителя поступает регистрируемый сигнал. Усилитель состоит из трех каскадов. Первые два каскада усилителя являются усилителями постоянного тока, выполненными по двухтактной схеме. Переключение каналов усилителя производится путем запирания одного из входов усилителя сигналом отрицательной полярности. Усилитель управляется одновременно по обоим входам кратковременными импульсами положительной полярности. Поэтому входные сигналы воздействуют на усилитель только в моменты наличия управляющего импульса и таким образом приобретают определенную последовательность во времени. Кроме того, по этой же причине входные сигналы формируются по длительности, так как длительность их воздействия на вход усилителя ограничивается временем действия управляющего импульса.

Выходной каскад усилителя представляет собой двухламповый усилитель переменного тока, выполненный по мостовой схеме. Обмотка записывающей головки включена в диагональ моста, причем один полюс обмотки находится под нулевым потенциалом. Питание анодной цепи первой лампы производится от источника положительной полярности, катодная же цепь второй лампы включена на источник питания отрицательной полярности. В первом источнике заземлен минус, а во втором — плюс. В сеточные цепи ламп выходного каскада поступают импульсы с анодов ламп второго каскада усилителя. Таким образом, в зависимости от того, с какого выхода усилителя придет сигнал, на обмотке магнитной головки образуется положительный или отрицательный импульс напряжения.

Записывающая головка выполнена конструктивно так, что обеспечивается точечное намагничивание материала вдоль тракта записи.

Приведена принципиальная схема самописца. *В. А. Зимин*

3541 П. Электрическое запоминающее устройство на газонаполненных лампах. Брей, Хартли, Райдлер (Electrical storage of information of gas-filled tubes. Bray Frederick Harry, Hartley George Clifford, Ridler Desmond Sydney) [International Standard Electric Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2638506, кл. 179—27, 12.05.53

Устройство состоит из групп запоминающих элементов, использующих газонаполненные лампы, и кнопочных переключателей. Система содержит коммутационную схему для подсоединения любой группы запоминающих элементов к клавиатуре. Для управления посылкой кода в запоминающие элементы имеются спусковые схемы, по одной на каждый разряд. Спусковые схемы реагируют на любую комбинацию нажатых кнопок таким образом, что посылают нужную комбинацию, соответствующую заданному коду, в подсоединенную группу запоминающих элементов. *П. П. Головистиков*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3542. Самолетное навигационное устройство фирмы «Коллинс». Баумгартнер (L'Integrated Flight System de Collins. Baumgartner Franz), Interavia, 1953, 8, № 10, 602—604 (франц.)

Описание схемы действия нового устройства I. F. S. (Integrated Flight System) фирмы «Коллинс» (Collins Radio Co.), предназначенного для автоматического или полуавтоматического управления полетом самолетов гражданской авиации. Характерным является то, что при посадке в условиях плохой видимости пилот сосредоточивает свое внимание на единственном указателе, показание которого определяется данными компаса, гироскопического горизонта, а также сигналами наземных передатчиков. При определенных упрощающих предположениях элементарно выводится, что это показание в случае горизонтального полета является линейным однородным дифференциальным оператором 2-го порядка (с постоянными коэффициентами) от расстояния самолета до вертикальной плоскости, в которой должна быть совершена посадка. Поэтому поддержка указателя на нуле обеспечивает асимптотическое приближение самолета к этой плоскости, причем скорость приближения определяется корнями соответствующего характеристического уравнения. При автоматическом регулировании расстояние самолета от указанной плоскости удовлетворяет дифференциальному уравнению, зависящему также от действия сервомоторов, отклоняющих элероны и

рули самолета. Автор, не выписывая этого уравнения, указывает, что оно 4-го порядка и дает возможность исследовать устойчивость полета.

А. Д. Мышкис

3543. Преобразователь названия пункта вызова в вычислительном устройстве АМА. Брансон (The AMA called-office name translator. Branson D. E.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 7, 269—274 (англ.)

Преобразователь названия пункта вызова в вычислительном устройстве АМА (РЖМат, 1953, 512) выполняет операции по преобразованию последовательности из трех цифр, поступающей на центральный пункт, в последовательность двух букв и цифры, соответствующую наименованию пункта вызова.

На вычислительное устройство АМА при вызовах поступают сигналы от большого количества телефонных переговорных пунктов, находящихся в различных районах. Каждый из этих пунктов имеет присущее ему обозначение, состоящее из двух букв и цифры. Общее количество подобных трехзначных обозначений пунктов, получаемых при помощи телефонного номеронабирателя, равно 640.

Вначале сигналы о вызовах записываются на ленту, а затем поступают на преобразователь названия пункта вызова. В преобразователе сигналы воздействуют на систему переключателей, расположенных в виде матрицы, состоящей из 10 рядов переключателей с 20 переключателями в ряду. Замыкание каждого из переключаталей происходит лишь при соответствующей последовательности сигналов. Приводится пример перевода цифр в сокращенное наименование пункта вызова (из двух букв и цифры). При замыкании избранного реле образуются сигналы, воздействующие на электронную схему, состоящую из ряда одинаковых ячеек (согласно числу букв и цифр, подлежащих печатанию.) Каждая ячейка состоит из тиратрона и трех электронных ламп, управляющих зажиганием тиратрона. В сеточные цепи электронных ламп на входах ячеек включены тороидальные трансформаторы, на которые поступают сигналы от реле матрицы.

Эти трансформаторы расположены в определенном порядке, так что через несколько из них (в приведенном примере через три) проходит общий провод, служащий первичной обмоткой. На общие провода системы ячеек сигналы в виде тока поступают при действии переключателей матрицы. При помощи большого отрицательного смещения на сетке (—48 *в*) лампы заперты и открываются лишь с приходом сигнала на общий провод. Тогда, после усиления лампой, сигналы передаются в сеточную цепь тиратрона и открывают его.

В анодную цепь тиратрона (на выходе ячейки) включено реле, печатающее букву или цифру.

Результаты преобразования печатаются на бумажную ленту.

В преобразователе имеется также устройство, контролирующее правильность работы механизма печатания букв и цифр.

Приведены блок-схемы и фотография преобразователя.

В. С. Бородин

3544. «Аудри» лаборатории «Белл» (Bell Labs' Audrey), Radio-Electronics, 1953, **24**, № 3, 14 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 996.

3545. Новые перспективы. Автоматические заводы (New horizon. Automatic factories), Tele-Tech, 1953, **12**, № 8, 58 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о возможностях использования электронной счетной машины ИРА-1103 для автоматического управления технологическими процессами на химических и нефтеочистительных заводах, а также для других целей, например для управления движением самолетов, для противовоздушной обороны, для испытания самолетов и т. д. См. также РЖМат, 1954, 1850, 1851.

См. также: 3316

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3546. Великие математики древности. Кучера (Velcí matematikové starověku. Kučera A.), Svět techn., 1953, **4**, № 5, 309—315 (чеш.)

Краткий обзор математики в Древнем Вавилоне и Древнем Египте и основных достижений греческих математиков от Фалеса до Диофанта. Изложение иногда нечеткое (например, в обзоре «Начал» Евклида), некоторые оценки неточны (например, Архимеду приписано первенство в открытии дифференциального и интегрального исчисления). Автор без достаточных оснований преувеличивает значение египетских знаний для развития греческой и эллинистической математики.

А. П. Юшкевич

3547. Из истории логарифмов. Холингер (Din istoricul logaritmilor. Holinger A.), Gas. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 10, 462—465 (рум.)

Популярный очерк истории логарифмов.

В. М. Брадис

3548. Нильс Генрик Абель. Брун (Niels Henrik Abel. Brun Viggo), Norske vid. selsk. forh., Trondheim, 1952, **25**, 25—43 (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 832.

3549. Набросок библиографии сочинений Клеро. Татон (Esquisse d'une bibliographie de l'oeuvre de Clairaut. Taton René), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 2, 161—168 (франц.)

3550. К. П. Персидский (К 50-летию со дня рождения). Жаутыков О., Вестн. АН. Каз. ССР, 1953, № 11, 46—50

Биография известного советского математика проф. К. П. Персидского и обзор его научных трудов.

3551. Выдающийся китайский ученый Хуа Логэн. Яо Фан-ин, Народный Китай, 1953, № 22, 33—35

Биографические данные и краткий обзор научной и общественной деятельности крупнейшего китайского ученого Хуа Ло-гэна.

3552 **К. Михаил Васильевич Остроградский. Отрадных Ф. П.**, 102 стр., Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1953, 2 р. 55 к.

Небольшая книга Ф. П. Отрадных написана на основе обширной диссертационной работы автора (1946 г.). В книге используются, наряду с известной биографической и юбилейной литературой об Остроградском (в частности, «М. В. Остроградский. Празднование столетия со дня его рождения», Полтава, 1902), некоторые материалы, менее доступные широкому кругу читателей (первоисточники, архивные материалы). Книга рассчитана на студентов физ.-мат. факультетов и учителей; в ней освещаются главнейшие этапы жизни и творчества знаменитого русского математика.

К книге приложен интересный редкий портрет М. В. Остроградского. *Е. Я. Ремез*

3553 **РЕЦ. Михаил Васильевич Ломоносов. Морозов Александр**, изд. 2-е, доп. и переработ. С предисл. акад. С. И. Вавилова, Ленингр. газ.-журн. и книжное изд-во, 1952, 856 стр. [**Рецензия: Иванов А. Н.**, Природа, 1954, № 1, 118—121]

См. также: 3526

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдельхаи 3361 К
Агабабян Е. Х. 3335
Агарвал 3373, 3375
Аит-Уяхья 3535 РЕЦ
Александер 3486, 3488
Алексеева О. П. 3332
Аллен 3404
Андерсон 3205
Андрю 3419
Апостол 3205
Арсов 3479, 3480

Б

Бабкин Б. Н. 3459, 3460
Балагангадхаран 3366
Баротта 3510
Барч 3235
Баумгартнер 3542
Баяда 3270
Бейкер 3533
Бейли 3374
Беллами 3538 П
Белломи 3483
Белов 3482
Бельграно Бремард 3472
Белюгу 3535 РЕЦ
Бенадо 3264
Беркилл 3280
Берлянд М. Е. 3340
Бермант А. Ф. 3360 К
Бирман М. Ш. 3328
Блисс 3413
Блэкуэлл 3388
Боас 3477
Болан 3514
Болдер 3309 К
Бондарь Н. Г. 3468
Боркман 3461
Бородин В. А. 3467
Брансон 3543
Браун 3221
Бредихин Б. М. 3230 Д
Брей 3541 П
Брёйн 3359
Бройль 3382
Брок 3316
Бронштейн И. Н. 3193 К
Брун 3548
Бугаенко Г. А. 3341
Букович 3445
Булиган 3190, 3452, 3453
Бурдина В. И. 3315
Буххольц 3195 РЕЦ

В

Вазов 3386
Варнум 3415
Васильев В. В. 3465
Вейсман 3498
Вернотт 3469
Вецгер 3376, 3377
Видок 3196 РЕЦ
Виленкин Н. Я. 3243
Виллерс 3526
Винтнер 3329
Волк В. Я. 3319
Волков Д. М. 3331
Воробьев Н. Н. 3267
Вороной Г. Ф. 3228 К
Вьола 3283 РЕЦ
Вьялар 3411

Г

Ганоусек 3533
Гаррисон 3435
Гарсия 3208
Гарсия-Прадильо 3364
Гельфанд И. М. 3246, 3247
Геринг 3280
Герлах Л. Р. 3537 Д
Геронимус Я. Л. 3323
Гест 3470
Гилберт 3497
Гилберт 3497
Глодан 3223
Гнеденко Б. В. 3387
Годо 3440 К
Голдстейн 3342, 3343
Голдхабер 3236
Гольдман 3476
Гончаров 3352
Гофман 3282 К
Граев М. И. 3246, 3247
Гранди 3473
Грей 3518
Грей 3369
Гринвуд 3385
Гринуолд 3486
Гриффитс 3424
Гроссман Д. П. 3466
Грубин А. Н. 3349
Грузов Л. Н. 3534 К
Гу 3462
Гуревич Г. Б. 3248

Д

Дабони 3384
Даммер 3502, 3503, 3505
Дарлинг 3390
Дас 3403
Дейси 3507
Деланж 3306
Дольрю 3367
Де-Словере 3351
Джаколетто 3508
Джентайл 3510
Джефрис 3312
Джонстон 3503, 3505
Джха 3441
Джэксон 3237
Диксмье 3380
Дингас 3322, 3324
Дитякин Ю. Ф. 3467
Добрушин Р. Л. 3391
Драхлин Е. Х. 3363
Дрейзин 3259
Дубошин Г. Н. 3318
Дуосс 3407
Душек 3195 РЕЦ

Е

Еремин С. А. 3295

Ж

Жаутыков О. 3550
Живоглядов В. Г. 3238

З

Земанек 3417
Земмер 3261
Зюзько М. П. 3327

И

Иванов А. Н. 3553 РЕЦ

Й

Йордан 3263

К

Каве 3422
Камынин Л. И. 3457
Каплан 3310 К, 3362 К
Карлиц 3209, 3214, 3216, 3217, 3218, 3219, 3220, 3301
Карман 3344, 3345
Кершоу 3509
Кивелевич 3411
Кимбалл 3408
Кислер 3478
Кларк 3194 К
Клейн-Бармен 3266
Кобб 3430
Кобленз 3515
Кованцов Н. И. 3444
Кодаира 3272, 3273, 3274
Кокс 3394
Кондрашов В. И. 3350
Короминас 3354
Косс 3519
Краскал 3409
Курош А. Г. 3255 РЕЦ
Кучера 3546

Л

Лакшминарасимхан 3300
Ланг 3253
Лангман 3429
Ландал 3345
Левер 3412
Левитан Б. М. 3320, 3321
Левонян 3518
Лензе 3346 К
Ливингстон 3302
Линник Ю. В. 3398, 3399
Лич 3473
Лоренцен 3256
Ломан 3509
Лурсманашвили А. П. 3210
Лурье А. И. 3334

М

Мазур 3268
Майлс 3501
Майрхофер 3283 РЕЦ
Мак 3397

Мандль 3336
Маннос 3234
Мапстон 3475
Мачинский 3396
Медведев Ю. Т. 3279
Мергелян С. Н. 3293, 3294
Мерли 3463, 3464
Милнор 3314
Минорский 3317
Миньо 3458
Минь Сы-хао 3226
Митман 3400
Митрович 3281
Михэйляну 3439
Мозер 3222
Морган 3532
Морозов А. 3553 **РЕЦ**
Морс 3270
Мун 3338
Муньис 3358
Мурман 3437

Н

Нагата 3257, 3258
Найт 3275
Носажевская 3278
Нудельман А. А. 3288

О

Огай С. В. 3231
Олвер 3372
Оппенгейм 3211
Отрадных Ф. П. 3552 **К**
Оуэнс 3515

П

Палама 3201
Парамесваран 3225
Партхасаратхи 3202
Пешль 3305
Пиз 3355
Пик 3239
Пирс 3434
Платрийе 3446
Положий Г. Н. 3297
Понтрягин Л. С. 3299
Попова Н. В. 3296
Прахар 3206
Про 3423

Р

Рабиновиц 3487
Равиньо 3432
Райдлер 3541 **П**
Ралевич 3427
Рамзайер 3523
Рао 3204, 3402
Рвачева 3182
Рвачова К. Л. 3182
Редеи 3240
Рингенберг 3428
Рихтер 3383
Робертс 3347
Робинсон 3527
Роджерс 3213
Романовский В. И. 3421
Росс 3507
Рубинов 3518
Рылл-Нардзевский 3197

С

Сад 3254
Сал 3313
Салаи 3325
Самюэль 3438
Сасаки 3262
Саутуэлл 3381
Себаштьян-и-Силва 3379
Сельмер 3215
Семендяев К. А. 3193 **К**
Сеп 3240
Серр 3271
Сингх 3436
Сковгорд 3370
Сколем 3265
Смит 3394
Сойер 3212
Спейн 3451 **К**
Спенсер 3273, 3274, 3338
Спрейг 3484
Стейблер 3199 **К**
Стейнбергер 3454
Стефаняк 3474
Стечкин С. Б. 3284, 3292
Стоун 3416
Стоякович 3233
Ступоченко Е. В. 3348
Стюарт 3410
Су Бу-цин 3186
Судзуки 3269
Суле 3535 **РЕЦ**

Т

Такено 3448
Татон 3549
Татчелл 3378
Таунсенд 3539 **П**
Тейлор 3456
Титс 3249
Тиц 3326
Томсен 3395
Торн 3330
Тушар 3207

У

Ульянов П. Л. 3285, 3286
Уитлок 3431
Уотсон 3203
Уэйплс 3236
Уэйт 3337
Уэно 3449

Ф

Фетцер 3471
Финетти 3489
Фиников С. П. 3443
Фишер 3414
Фландерс 3447
Флеминг 3540 **П**
Форстер 3353
Франки 3208
Фрёйденталь 3250, 3251, 3252
Фреше 3308
Фромажо 3418
Фростман 3455

Х

Ханани 3356
Харизоменов О. В. 3536 **Д**
Хартли 3541 **П**
Хартман 3329
Хаслам-Джонс 3277
Хейлперин 3198
Хелсон 3245
Херзог 3509
Хирон 3339
Хирцебрух 3307
Хиршман 3287
Ходкинсон 3420
Холингер 3547
Хоэтер 3486
Хуа Ло-гэн 3227 **К**
Хупперт 3241

Ц

Целлер 3303
Цудзи 3304

Ч

Чакалов Л. 3291
Чакрабарти 3371
Черников 3232
Черников С. Н. 3255 **РЕЦ**
Чжун Гай-лай 3389
Чулановский И. В. 3229 **Д**
Чэн Минь-дэ 3184
Чэнь Цзянь-гун 3185, 3365

Ш

Шаманский В. Е. 3298
Шапиро 3224
Шапиро 3290
Шарф 3442
Шафер 3260
Шевляков Ю. А. 3333
Шекел 3481
Шепард 3242
Шефер 3405
Шилов Г. Е. 3289
Ширшов В. М. 3200
Шмелинг 3531
Шметтерер 3406
Штейнхаус 3393

Э

Эванс 3433
Эделстейн 3276
Эйзенклам 3425
Эйнштейн 3450
Элкин 3401
Эллис 3253
Эмбер 3367, 3368
Энрик 3426
Эрве 3305
Эрдёш 3359
Эрих 3196 **РЕЦ**
Эруин 3392
Эстрин 3485

Я

Якобшталь 3311
Ямабе 3244
Яо Фан-ин 3551
Ярден 3357

A

Abdelhay J. 3361 **К**
Agarwal R. P. 3373, 3375
Ait Ouyahia M. 3535 **РЕЦ**
Alexander S. N. 3486, 3488
Allen S. G., Jr 3404
Anderson D. R. 3205
Andrew A. M. 3419
Apostol T. M. 3205
Arsove M. G. 3479, 3480

B

Baiada E. 3270
Bailey W. N. 3374
Baker W. 3533
Balagangadharan K. 3366
Barotta P. J. 3510
Bartsch H. 3235
Baumgartner F. 3542
Belgrano Brémard J. C. 3472
Bellamy J. I. 3538 **П**
Bellomi C. 3483
Belove Ch. 3482
Belugou P. 3535 **РЕЦ**
Benado M. 3264
Blackwell D. 3388
Bliss C. I. 3413
Boas M. L. 3477
Bolant R. 3514
Bolder H. 3309 **К**
Borkmann K. 3461
Bouligand G. 3190, 3452, 3453
Branson D. E. 3543
Bray F. H. 3541 **П**
Brock P. 3316

Broglie L. de 3382
Brown A. L. 3221
Bruijn N. G. de 3359
Brun V. 3548
Buchholz H. 3195 **РЕЦ**
Bukovics E. 3445
Burkill J. C. 3280

C

Carlitz L. 3209, 3214, 3216—3220, 3301
Cavé M. 3422
Chakrabarty N. K. 3371
Chung Kai Lai 3389
Clarke L. H. 3194 **К**
Cobb R. H. 3420
Coblenz A. 3515
Corominas E. 3354
Coss B. A. 3519
Cox D. R. 3394

D

Daboni L. 3384
Dacey G. C. 3507
Darling D. A. 3390
Das A. C. 3403
Daus P. H. 3191
Delange H. 3306
Delerue P. 3367
De Sloovere H. 3351
Dinghas A. 3322, 3324
Dixmier J. 3380
Drazin M. P. 3259
Dummer G. W. A. 3502, 3503, 3505
Duschek A. 3195 **РЕЦ**
Dwass M. 3407

E

Edelstein M. 3276
Ehrich H. 3196 **РЕЦ**
Einstein A. 3450
Eisenklam P. 3425
Elkin J. M. 3401
Ellis D. 3253
Enrick N. L. 3426
Erdös P. 3359
Erwe F. 3305
Estrin G. 3485
Evans S. E. 3433

F

Fetzer V. 3471
Finetti B. de 3489
Fisher R. A. 3414
Flanders H. 3447
Fleming H. M., Jr 3540 **П**
Forster H. 3353
Franqui B. 3208
Fréchet M. 3308
Freudenthal H. 3250 — 3252
Fromageot A. 3418
Frostman O. 3455

G

Garcia M. 3208
García Pradillo J. 3364
Gehring F. W. 3280
Gentile S. P. 3510
Giacoletto L. J. 3508
Gilbert E. G. 3497
Gilbert E. O. 3497
Gloden A. 3223
Godeaux L. 3440 **К**
Goffman C. 3282 **К**
Goldhaber J. K. 3236
Goldmann K. 3476
Goldstein S. 3342, 3343
Goncearov V. L. 3352,
Gray H. J., Jr 3518
Gray M. C. 3369
Greenwald S. 3486
Greenwood R. E. 3385
Griffiths L. 3424
Grundy P. M. 3473
Guest P. G. 3470

H

Hailperin Th. 3198
Hanani H. 3356
Hanousek R. 3533
Harrison A. 3435
Hartley G. C. 3541 **П**
Hartman Ph. 3329
Haslam-Jones U. S. 3277
Haueter R. C. 3486
Hearon J. Z. 3339
Helson H. 3245
Herzog G. B. 3509
Hirschman I. I., Jr 3287
Hirzebruch F. 3307
Hodkinson J. R. 3420
Holinger A. 3547
Humbert P. 3367, 3368
Huppert B. 3241

I

Irwin J. O. 3392

J

Jackson J. R. 3237
Jacobsthal E. 3311
Jarden D. 3357
Jeffreys H. 3312
Jha P. 3441
Johnston D L. 3503, 3505
Jordan P. 3263

K

Kaplan W. 3310 **К**, 3362 **К**
Karreman G. 3344, 3345
Kießler F. 3478
Kimball B. F. 3408
Kiveliovitch M. 3411
Klein-Barmen F. 3266
Knight A. J. 3275
Kodaira K. 3272, 3273, 3274
Kruskal W. H. 3409
Ku Y. H. 3462
Kučera A. 3546
Kurshaw J. 3509

L

Lakshminarasimhan T. V. 3300
Landahl H. D. 3345
Lang G. 3253
Langman H. 3429
Leech F. B. 3473
Lense J. 3346 **К**
Levert Ch. 3412
Levonian P. V. 3518
Livingston A. E. 3302
Lohman R. D. 3509
Lorenzen P. 3256

M

Mack C. 3397
Mandl G. 3336
Mannos M. 3234
Mapstone G. E. 3475
Matschinski M. 3396
Mayrhofer K. 3283 **РЕЦ**
Mazur S. 3268
Mergelyan S. N. 3294
Merli L. 3463, 3464
Mignot N. 3458
Mihăileanu N. 3439
Miles R. C. 3501
Milnor J. 3314
Minorsky N. 3317
Mitrović D. 3281
Mittmann O. M. J. 3400
Moon P. 3338
Morgan E. H. 3532
Morse M. 3270
Moser L. 3222
Mourmant P. 3437
Muñiz E. O. 3358

N

Nagata M. 3257
Nosarzewska M. 3278

O

Olver F. W. J. 3372
Oppenheim A. 3211
Owens H. L. 3515

P

Palamà G. 3201
Parameswaran S. 3225
Parthasarathy M. 3202
Peaşe D. K. 3355
Peres N. J. C. 3434
Peschl E. 3305
Pic Gh. 3239
Platrier Ch. 3446
Prachar K. 3206
Prot M. 3423

R

Rabinowitz P. 3487
Raljević S. 3427
Ramsayer K. 3523
Rao K. S. 3204, 3402
Ravigneaux P. 3432
Rédei L. 3240
Richter H. 3383
Ridler D. S. 3541 **П**
Ringenberg L. A. 3428
Roberts J. H. 3347
Robinson R. B. 3527
Rogers K. 3213
Ross I. M. 3507
Rubinoff M. 3518
Ryll-Nardzewski C. 3197

S

Sade A. 3254
Samuel P. 3438
Sasaki U. 3262
Sawyer D. B. 3212
Schafer R. D. 3260
Scharff H. 3442
Schäfer W. 3405
Schmeling F. 3531
Schmetterer L. 3406
Sebastião e Silva J. 3379
Selmer E. S. 3215
Serre J.-P. 3271
Shapiro H. N. 3224
Shapiro V. L. 3290
Shekel J. 3481
Shephard G. C. 3242
Singh K. 3436
Skolem Th. 3265
Skovgaard H. 3370
Smith W. L. 3394
Soulé J.-L. 3535 **РЕЦ**
Southwell R. V. 3381
Spain B. 3451 **К**
Spencer D. E. 3273, 3274, 3338
Sprague R. E. 3484
Stabler E. R. 3199 **К**
Stefaniak H. 3474
Steinberger M. 3454
Steinhaus H. 3393
Stone W. M. 3416
Stojaković M. 3233
Stuart A. 3410
Suhl H. 3313
Suzuki J. 3269
Szalay L. v. 3325
Szép J. 3240

T

Takeno H. 3448
Tatchell J. B. 3378
Taton R. 3549
Taylor S. J. 3456
Tchernikow S. N. 3232
Thomsen J. S. 3395
Thorne R. C. 3330
Tietz T. 3326
Tits J. 3249
Touchard J. 3207
Townsend M. A. 3539 **П**
Tsuji M. 3304

U

Ueno Y. 3449

V

Varnum E. C. 3415
Vernotte P. 3469
Vialar J. 3411
Viola T. 3283 **РЕЦ**

W

Wait J. R. 3337
Wasow W. 3386
Watson G. L. 3203
Weissman R. 3498
Wetzger J. 3376, 3377
Whaples G. 3236
Whitlock W. P., Jr 3431
Widok M. 3196 **РЕЦ**
Willers F.-A. 3526
Wintner A. 3329

Y

Yamabe H. 3244

Z

Zeller K. 3303
Zemanek H. 3417
Zemmer J. L. 3261
永田雅宜 3258
程民德 3184
華羅庚 3227
蘇步青 3186
関嗣鶴 3226
陳建功 3185, 3365

Технический редактор *К. И. Игнаткова*